

Partie I : Série trigonométrique à coefficients décroissants

1°) a) Ceci repose sur une série télescopique : $2 \sin \frac{x}{2} \sin kx = \cos(k - \frac{1}{2})x - \cos(k + \frac{1}{2})x$.

b) Transformation d'Abel ; mais ici la formule étant donnée, il suffit de vérifier :

$$A_n = \sum_{k=1}^n b_k E_k - \sum_{k=1}^n b_{k+1} E_k = \sum_{k=1}^n b_k E_k - \sum_{k=2}^{n+1} b_k E_{k-1} = \sum_{k=2}^n b_k \sin kx + b_1 \sin x - b_{n+1} E_n = f_n(x) - b_{n+1} E_n$$

c) Établissons la seconde majoration d'abord ; la première en résultera en prenant $n = 0$. On a :

$$\sin \frac{x}{2} (A_p - A_n) = \sum_{k=n+1}^p (b_k - b_{k+1}) \sin \frac{x}{2} E_k = \frac{1}{2} \sum_{k=n+1}^p (b_k - b_{k+1}) (\cos \frac{x}{2} - \cos(k + \frac{1}{2})x)$$

et une différence de cosinus ne peut dépasser 2, donc $|\sin \frac{x}{2} (A_p - A_n)| \leq \sum_{k=n+1}^p (b_k - b_{k+1}) = b_{n+1} - b_{p+1}$.

Enfin, on a par sommation :

$$\begin{aligned} |\sin \frac{x}{2} (f_p(x) - f_n(x))| &\leq b_{n+1} - b_{p+1} + \frac{1}{2} |b_{n+1} (\cos \frac{x}{2} - \cos(n + \frac{1}{2})x) - b_{p+1} (\cos \frac{x}{2} - \cos(p + \frac{1}{2})x)| \\ &\leq b_{n+1} - b_{p+1} + b_{n+1} + b_{p+1} = 2b_{n+1} \end{aligned}$$

pour la même raison que ci-dessus.

2°) Pour $x = 0$ et $x = \pi$ la convergence est immédiate. Sur $]0, \pi[$, on utilise d'abord le critère de Cauchy pour montrer la convergence simple de la suite (f_n) : $|f_p(x) - f_n(x)| \leq \frac{2b_{n+1}}{2 \sin \frac{x}{2}} \leq \varepsilon$ pour n assez grand et $p > n$, en raison de la convergence

vers 0 de la suite (b_n) . Notons f la limite simple de la suite (f_n) ; c'est clairement une fonction impaire et 2π -périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On peut alors faire tendre p vers l'infini dans la dernière majoration de la question précédente, ce qui donne $|\sin \frac{x}{2} (f(x) - f_n(x))| \leq 2b_{n+1}$. Lorsque x est dans $[\alpha, \pi]$, on peut majorer ainsi : $|f(x) - f_n(x)| \leq 2 \frac{b_{n+1}}{|\sin \frac{\alpha}{2}|}$, ce qui amène aussitôt la convergence uniforme sur cet intervalle. Il en résulte que f est continue sur tous les segments $[\alpha, \pi]$ donc aussi sur $]0, \pi[$, et même sur $\mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$. On verra plus loin un exemple où f est non bornée en 0.

3°) a) Le sinus est concave sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, donc $\sin x \geq \frac{2}{\pi}x$ sur cet intervalle.

b) Il nous suffira d'établir la convergence uniforme de la suite de fonctions $g_n(x) = \sin mx f_n(x)$ sur $\mathbb{R}$. On reprend les majorations antérieures : $|\sin mx (f_p(x) - f_n(x))| \leq 2b_{n+1} \frac{|\sin mx|}{\sin \frac{x}{2}} \leq 2b_{n+1} \frac{mx}{\frac{x}{\pi}} = 2m\pi b_{n+1}$ d'où le résultat. En fait, on

aurait pu majorer directement car on a (par récurrence) : $|\sin mx| \leq m|\sin x|$.

La fonction $g(x) = \sin mx f(x)$ étant ainsi 2π -périodique, impaire et continue sur $\mathbb{R}$, on peut l'intégrer. On trouve alors (toujours par convergence uniforme) :

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin mx f(x) dx = \frac{2}{\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\pi \sin mx f_n(x) dx = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^\infty b_k \int_0^\pi \sin mx \sin kx dx$$

et on reconnaît dans $\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin mx \sin kx dx$ le k -ième coefficient de Fourier de la fonction $\sin mx$, qui est nul sauf si $m = k$.

Finalement, on a :

$$\boxed{\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin mx f(x) dx = b_m}$$

Cette formule permet de dire, par extension, que les coefficients de Fourier $b_m(f)$ existent et sont égaux aux b_m . Ce n'est pas pour autant que f est une série de Fourier, car il reste à savoir si les intégrales $\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \cos mx f(x) dx$ convergent ; ce qui va être étudié dans la partie III.

Partie II : Condition de convergence uniforme sur $\mathbb{R}$

4°) a) On a en fait posé $\frac{\pi}{p+1} < x \leq \frac{\pi}{p}$. Dans la première somme, on applique l'inégalité $|\sin x| \leq |x|$, d'où en majorant la somme par le nombre de termes multiplié par ε_n :

$$\left| \sum_{k=n}^{n+p-1} b_k \sin kx \right| \leq \sum_{k=n}^{n+p-1} kb_k x \leq \varepsilon_n p x \leq \pi \varepsilon_n$$

La deuxième somme vaut : $\left| \sum_{k=n+p}^\infty b_k \sin kx \right| = |f(x) - f_{n+p-1}(x)|$ mais d'après la question 1°c adaptée à ce contexte (un indice infini) on a $\sin \frac{x}{2} |f(x) - f_{n+p-1}(x)| \leq 2b_{n+p}$ donc en utilisant l'inégalité du 3°a

$$|f(x) - f_{n+p-1}(x)| \leq \frac{2b_{n+p}}{|\sin \frac{x}{2}|} \leq \frac{2\pi}{x} b_{n+p} < 2(p+1)b_{n+p} \leq 2(n+p)b_{n+p} \leq 2\varepsilon_n$$

ce qu'il fallait.

b) Par hypothèse, la suite (ε_n) tend vers 0. En ajoutant les deux sommes précédentes, on voit que $\sum_{k=n}^{\infty} b_k \sin kx$ tend uniformément vers 0 sur $]0, \pi]$, donc aussi sur $[0, \pi]$ (car en 0 il n'y a aucun problème de convergence). Il est à noter que p ne joue plus aucun rôle à présent. On vient de montrer la convergence uniforme du reste de la série, donc la même chose a lieu pour les sommes partielles f_n .

5°) Réciproquement, supposons que (f_n) converge uniformément sur $[0, \pi]$.

Lemme. Si une suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers f continue sur un domaine D , et si une suite (x_n) d'éléments de D converge vers $\ell \in D$, alors la suite $(f_n(x_n))$ converge vers $f(\ell)$.

Preuve : $|f_n(x_n) - f(\ell)| \leq |f_n(x_n) - f(x_n)| + |f(x_n) - f(\ell)| \leq \|f_n - f\|_{\infty} + |f(x_n) - f(\ell)|$ et on conclut par continuité de f .

Nous appliquons ce lemme ici à $x_n = \frac{\pi}{2n}$. Ainsi, $f_n(\frac{\pi}{2n})$ doit tendre vers 0. Mais $f_n(\frac{\pi}{2n}) = \sum_{k=1}^n b_k \sin \frac{k\pi}{2n}$, et cette somme n'a que des termes positifs, et est minorée (3°a) par $\sum_{k=1}^n b_k \frac{k}{n} \geq \frac{b_n}{n} \sum_{k=1}^n k = \frac{n+1}{2} b_n \geq \frac{nb_n}{2}$ donc la suite (nb_n) doit avoir sa limite nulle. Finalement, on a montré que

La série $\sum b_k \sin kx$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ si, et seulement si $b_n = o(\frac{1}{n})$.

Partie III : Condition d'intégrabilité

6°) a) On a comme au II3°, pour $x \in [\frac{\pi}{n+1}, \frac{\pi}{n}]$: $|f(x) - f_n(x)| \leq \frac{2b_{n+1}}{|\sin \frac{x}{2}|} \leq \frac{2\pi}{x} b_{n+1} \leq 2(n+1)b_{n+1}$ donc

$\int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\frac{\pi}{n}} |f(x) - f_n(x)| dx \leq 2(n+1)b_{n+1}\pi(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) = \frac{2\pi}{n} b_{n+1}$; et en majorant chaque sinus par 1 on a

$$\int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\frac{\pi}{n}} |f_n(x)| dx \leq \pi(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) \sup_{[\frac{\pi}{n+1}, \frac{\pi}{n}]} |f_n(x)| \leq \pi(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) s_n.$$

b) On somme les intégrales précédentes : $\sum_{n=1}^{N-1} \int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\frac{\pi}{n}} |f(x)| dx = \int_{\frac{\pi}{N}}^{\pi} |f(x)| dx$ et il suffit de montrer que cette dernière intégrale a une limite lorsque N tend vers l'infini, parce que c'est une intégrale de fonction positive. Or, elle se majore par

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{N-1} \pi(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) s_n + \frac{2\pi}{n} b_{n+1} &= \pi \sum_{n=1}^{N-1} \frac{s_n}{n} - \pi \sum_{n=2}^N \frac{s_{n-1}}{n} + 2\pi \sum_{n=2}^N \frac{b_n}{n-1} \\ &= \pi \sum_{n=2}^{N-1} b_n(\frac{1}{n} + \frac{2}{n-1}) + \pi b_1 - \pi \frac{s_{N-1}}{N} + 2\pi \frac{b_N}{N-1} \end{aligned}$$

et tout ceci est borné d'après l'hypothèse (ii). Donc f est intégrable.

7°) Il s'agit du théorème de Cesàro, qui affirme que si b_n tend vers 0 (et c'est le cas ici), alors $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n b_k = \frac{s_n}{n}$ tend vers 0.

8°) a) Cette formule a été bâtie sur l'idée suivante : $\int_0^x \sin kt dt = \frac{1}{k} - \frac{\cos kx}{k}$. Il est commode de la vérifier par récurrence ; pour $n = 0$ elle s'écrit simplement comme : $0 = \lambda + F(x) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{k} \cos kx$. Or, la convergence de la suite (f_n) est uniforme sur $[x, \pi]$, donc on peut écrire :

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \int_x^{\pi} \sin kt dt = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \frac{\cos kx}{k} - \sum_{k=1}^{\infty} b_k \frac{(-1)^k}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \frac{\cos kx}{k} - \lambda$$

ce qu'il fallait. Pour passer de $n-1$ à n , il suffit de vérifier que $\frac{b_n}{n} = b_n \int_0^x \sin nt dt + \frac{b_n}{n} \cos nx$, ce qui est immédiat.

b) L'idée est de prendre $x = \frac{1}{n}$ dans la formule précédente. On majore la somme : $\left| \sum_{k=1}^n b_k \int_0^{\frac{1}{n}} \sin kt dt \right| \leq \sum_{k=1}^n b_k \frac{1}{n} = \frac{s_n}{n}$ et on a vu au 7° que ceci tend vers 0.

c) On a $2 \sin \frac{1}{2n} \cos \frac{k}{n} = \sin \frac{2k+1}{2n} - \sin \frac{2k-1}{2n}$ d'où

$$2 \sin \frac{1}{2n} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{b_k}{k} \cos \frac{k}{n} = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{b_k}{k} \sin \frac{2k+1}{2n} - \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{b_k}{k} \sin \frac{2k-1}{2n}$$

avec des séries qui convergent toujours selon le procédé d'Abel, grâce à la décroissance de $(\frac{b_k}{k})$. On décale les indices :

$$2 \sin \frac{1}{2n} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{b_k}{k} \cos \frac{k}{n} = \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{b_k}{k} - \frac{b_{k+1}}{k+1} \right) \sin \frac{2k+1}{2n} - \frac{b_{n+1}}{n+1} \sin \frac{2n+1}{2n}$$

et par la décroissance de $(\frac{b_k}{k})$ on peut majorer ainsi :

$$2 \sin \frac{1}{2n} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{b_k}{k} \cos \frac{k}{n} \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{b_k}{k} - \frac{b_{k+1}}{k+1} \right) + \frac{b_{n+1}}{n+1} = \frac{2b_{n+1}}{n+1}$$

donc $\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{b_k}{k} \cos \frac{k}{n} \right| \leq \frac{b_{n+1}}{(n+1) \sin \frac{1}{2n}} \sim 2b_{n+1}$ ce qui tend bien vers 0.

d) Il résulte des deux questions précédentes que $\sigma_n - \lambda - F(\frac{1}{n})$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini. Comme on suppose, selon (i), que F a une limite en 0, la suite (σ_n) en a une également, ce qu'on voulait. On a ainsi l'équivalence de (i) et (ii) et la curieuse formule

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n b_n}{n} = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_{2k+1}}{2k+1} = \int_0^{\pi} f(t) dt.$$

Soit dit en passant, le théorème de convergence dominée conduirait très rapidement à ce résultat, mais ce théorème n'était pas au programme à l'époque de cette épreuve. Notons aussi que cette situation englobe celle du II, car si $b_n = o(\frac{1}{n})$ alors $\frac{b_n}{n} = o(\frac{1}{n^2})$ et $\sum \frac{b_n}{n}$ converge.

Partie IV : Étude d'un exemple

9°) Soit $N = E(\frac{a}{x})$. Considérons a priori la somme $\sum_{n=1}^N x\psi(nx)$; sur l'intervalle $[nx, (n+1)x]$, ψ décroît donc $\psi(nx) \geq \psi(t) \geq \psi((n+1)x)$. donc en intégrant de nx à $(n+1)x$, puis en sommant sur n , on obtient

$$\sum_{n=1}^{N-1} x\psi(nx) \geq \int_x^{Nx} \psi(t) dt \geq \sum_{n=1}^{N-1} x\psi((n+1)x) = \sum_{n=2}^N x\psi(nx)$$

donc aussi $\sum_{n=1}^N x\psi(nx) \leq x\psi(x) + \int_x^{Nx} \psi(t) dt$ et $\int_x^{Nx} \psi(t) dt \leq \sum_{n=1}^N x\psi(nx)$. Or, on a $\frac{a}{x} - 1 \leq N \leq \frac{a}{x}$, donc Nx tend vers a lorsque x tend vers 0. Enfin, en intégrant l'inégalité $\psi(t) \geq \psi(x)$ on obtient $\int_0^x \psi(t) dt \geq x\psi(x)$, ce qui prouve que

$\lim_{x \rightarrow 0} x\psi(x) = 0$ Donc $\sum_{n=1}^N x\psi(nx)$ est encadré par deux expressions ayant la même limite $\int_0^a \psi(t) dt$, ce qu'il fallait.

10°) a) La série proposée (pour x fixé) est du modèle étudié dans ce problème, puisque si on pose $b_n = x\varphi(nx)$, (b_n) décroît à partir d'un certain rang. Donc la série converge. Nous allons utiliser les majorations du 1°c, toujours avec $p = +\infty$:

$$\left| \sum_{k=n}^{\infty} b_k \sin kx \right| \leq \frac{2b_n}{\sin \frac{x}{2}} \leq \frac{2\pi b_n}{x} = 2\pi\varphi(nx)$$

Choisissons alors A tel que $2\pi\varphi(y) < \varepsilon$ pour $y \geq A$; alors si $n = E(\frac{A}{x}) + 1$ on a bien $nx \geq A$ donc $2\pi\varphi(nx) < \varepsilon$, et ainsi $\left| \sum_{k=n}^{\infty} x\varphi(kx) \sin kx \right| \leq \varepsilon$; cette somme est exactement $\left| \sum_{k \geq \frac{A}{x}} x\varphi(kx) \sin kx \right|$ sauf si $\frac{A}{x}$ est entier, auquel cas on a un terme en trop qui s'écrit $|x\varphi(A) \sin A| \leq \pi|\varphi(A)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

b) Du côté de 0 on n'a aucun problème puisqu'on a supposé l'existence $\int_0^a \varphi(x) \sin x dx$. Du côté de l'infini, on peut découper l'intégrale et étudier $\sum_{p=1}^{\infty} \int_{p\pi}^{(p+1)\pi} \varphi(x) \sin x dx$ (la convergence de cette série assure celle de l'intégrale impropre parce que la longueur des morceaux est constante et que $\varphi \cdot \sin$ tend vers 0 à l'infini). Or, cette série converge selon le critère des séries alternées car on peut écrire: $u_p = \int_{p\pi}^{(p+1)\pi} \varphi(x) \sin x dx = (-1)^p \int_0^{\pi} \varphi(u + p\pi) \sin u du$, et la décroissance de φ , et sa limite, assurent les hypothèses ($(|u_p|)$ décroissante de limite nulle).

Soit $\varepsilon > 0$. Posons $\psi = \varphi \cdot \sin$. Appliquons la question 9°, pour découvrir que $\int_0^a \psi(t) dt$ est la limite de $\sum_{1 \leq n \leq \frac{a}{x}} x\varphi(nx) \sin nx$;

donc pour x assez petit on a $\left| \int_0^a \psi(t) dt - \sum_{1 \leq n \leq \frac{a}{x}} x\varphi(nx) \sin nx \right| < \varepsilon$.

Ensuite, on choisit A assez grand selon la question précédente pour majorer: $\left| \sum_{n \geq \frac{A}{x}} x\psi(nx) \right| < \varepsilon$ (indépendamment de x).

On augmente, si nécessaire, A pour que $\left| \int_A^{\infty} \psi(t) dt \right| < \varepsilon$, ce qui est possible d'après la convergence de $\int_0^{\infty} \psi(t) dt$. Ce choix ne dépend pas de x .

Enfin, A étant maintenant fixé, on peut appliquer le théorème des sommes de Riemann sur l'intervalle $[a, A]$ avec une subdivision de la forme $(px, (p+1)x, \dots, qx)$, de pas x pour obtenir que $\left| \int_a^A \psi(t) dt - \sum_{\frac{a}{x} < n < \frac{A}{x}} x\varphi(nx) \sin nx \right| < \varepsilon$ si x est

assez petit. Au total, on a obtenu que $\left| \int_0^{\infty} \psi(t) dt - \sum_{n=1}^{\infty} x\psi(nx) \right| < 4\varepsilon$, ce qui assure le résultat.

11°) a) Ici, nous avons $b_n = \frac{\ln n}{n}$ qui décroît pour $n \geq 3$ (étude de fonction), et tend vers 0. On met à part le terme correspondant à $n = 2$. D'après la partie III, f est intégrable sur $]0, \pi[$ si, et seulement si la série de terme général $\frac{\ln n}{n^2}$ converge, ce qui est le cas (car $\ln n = o(\sqrt{n})$ et on domine par une série de Riemann convergente). On voit, à cette occasion, que pour réaliser un exemple de fonction f non intégrable il faut prendre une suite (b_n) très lentement décroissante, par exemple $b_n = \frac{1}{\ln n}$. En revanche, pour l'intégrabilité sur $\mathbb{R}_+^*$ il y a aucun espoir, car f est périodique, et son intégrale sur une demi-période vaut $2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_{2k+1}}{2k+1} > 0$; l'intégrabilité sur $\mathbb{R}_+^*$ nécessiterait ici une valeur nulle (et bien davantage), ce qui n'est pas.

b) On écrit $\frac{\ln n}{n} = x \frac{\ln nx}{nx} - x \frac{\ln x}{nx}$ d'où $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x \frac{\ln nx}{nx} \sin nx - \ln x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$; la première série est du modèle étudié à la question 10°, tandis que la seconde est une série de Fourier bien connue, c'est celle de la fonction g impaire et 2π -périodique égale à $\frac{\pi-x}{2}$ sur $]0, 2\pi[$. Pour confirmer ce fait, il suffit de calculer (par parties) les coefficients de Fourier de cette dernière et de trouver que $b_n(g) = \frac{1}{n}$, puis d'appliquer le théorème de Dirichlet. La question 10° peut s'appliquer à la fonction $\frac{\ln x}{x}$: elle est positive, décroissante, de limite nulle sur $[e, +\infty[$; et sur $]0, 1]$, on note que $-\ln x \frac{\sin x}{x}$ est positive, décroissante (produit des fonctions $-\ln$ (décroissante) et $\frac{\sin x}{x}$ de dérivée $\frac{x \cos x - \sin x}{x^2} = \frac{\cos x}{x}(x - \tan x) \leq 0$ ici), intégrable (par équivalent à $\ln x$ en 0). On trouve ainsi que

$$f(x) = \int_0^{\infty} \frac{\ln t}{t} \sin t \, dt + o(1) - \ln x \frac{\pi}{2} + o(1)$$

expression qui répond à la question (avec $c = -\frac{\pi}{2}$).

c) Il en résulte que $f(x) = \mathcal{O}(\ln x)$ en 0. Comme $\int_0^{\pi} \ln^2 x \, dx$ existe (car en 0 $\ln x = o(x^{-1/2})$)) il en est de même de $\int_0^{\pi} f(x)^2 \, dx$. Dans ce cas, on conçoit que le théorème de Parseval pourrait être vrai, mais il n'est nullement évident (l'inégalité de Bessel, elle, est facile à vérifier dans ce cas).

Partie V : Licence de documentation publique (version 1.1)

Section A : Définitions

- 1°) « Utilisation Commerciale » signifie la distribution ou tout autre moyen de mise à disposition d'un tiers de la documentation.
- 2°) « Contributeur » signifie une personne ou une entité qui crée ou contribue à la création de modifications.
- 3°) « Documentation » signifie la documentation originale ou les modifications ou des combinaisons de la documentation originale et les modifications, dans chaque cas, incluant des parties de celles-ci.
- 4°) « Mécanisme de distribution électronique » signifie un mécanisme communément accepté pour le transfert électronique de données.
- 5°) « Auteur initial » signifie l'individu ou l'entité qui a été identifié(e) comme étant l'Auteur initial dans la notice obligatoire requise par l'Annexe.
- 6°) « Œuvre plus importante » signifie une œuvre qui combine de la documentation ou des parties de celle-ci avec de la documentation ou d'autres écrits qui ne sont pas couverts par les conditions de cette licence.
- 7°) « Licence » signifie ce document.
- 8°) « Modifications » signifie toute addition, ou suppression, de substance ou de structure d'une documentation originale ou autres modifications précédentes, telles que traduction, abstraction, résumé, ou toute autre forme dans laquelle la documentation originale ou modifications précédentes peut être resaisie, transformée ou adaptée. Une œuvre consistant en des révisions éditoriales, annotations, élaborations, et autres modifications qui, en tant qu'œuvre entière représente une œuvre de l'esprit original, est considérée comme étant une modification. Par exemple, lorsque la documentation est distribuée sous forme d'une série de documents, une modification est comprise comme étant :
- A. Toute addition à, ou suppression de, contenu de la documentation originale ou des modifications précédentes.
- B. Toute nouvelle documentation qui comporte toute partie de la documentation originale ou modifications précédentes.
- 9°) « Documentation originale » signifie de la documentation décrite comme étant la documentation originale dans la notice obligatoire requise par l'Annexe, et qui, au moment de sa distribution selon les conditions de cette licence ne constitue pas encore de la documentation couverte par cette licence.
- 10°) « Forme éditée » signifie la forme préférée de la documentation pour y effectuer des modifications. La documentation peut être sous forme électronique, compressée, ou sous forme d'archive, à condition que le logiciel de décompression ou de désarchivage soit largement disponible de manière gratuite.
- 11°) « Vous » (ou « Votre ») signifie un individu ou une entité juridique qui exerce des droits conformément à, et en respectant, toutes les conditions de cette Licence ou une version future de cette licence telle que publiée selon la Section D1 (« Versions de la Licence »). Pour des entités juridiques, « vous » couvre également toute entité qui contrôle, ou est contrôlée par, ou qui est sous contrôle commun avec vous. Pour les besoins de la présente définition, « contrôle » signifie
- (a) le pouvoir, direct ou indirect, de diriger ou gérer une telle entité, que ce soit de manière contractuelle ou par tout autre moyen, ou
- (b) la propriété de plus de cinquante pour cent (50%) des actions libérées ou de la propriété réelle d'une telle entité.

Section B : CONCESSIONS DE LICENCES

1°) Concession de Licence de l'Auteur Initial.

L'Auteur Initial vous concède, par la présente, une licence non-exclusive mondiale, sans redevances, d'utiliser, reproduire, préparer des modifications, compiler, représenter publiquement, afficher publiquement, faire démonstration, commercialiser, divulguer et distribuer la documentation sous toutes formes, sur tous supports ou via tout Mécanisme de Distribution Electronique ou autres méthodes connues aujourd'hui ou à découvrir à l'avenir, ainsi que le droit de concéder des sous-licences les droits énumérés précédemment à des tiers, à travers des systèmes multiples de sous-licences, selon les conditions de cette Licence.

Les droits de licence concédés dans la Section B1 (« Concession de Licence de l'Auteur Initial ») deviennent effectifs à la première date de distribution, par l'Auteur Initial de la documentation originale selon les conditions de cette Licence.

2°) Concession de Licence du Contributeur.

Chaque Contributeur vous concède, par la présente, une licence non-exclusive mondiale, sans redevances, d'utiliser, reproduire, préparer des modifications, compiler, représenter publiquement, afficher publiquement, faire démonstration, commercialiser, divulguer et distribuer la documentation sous toutes formes, sur tous supports ou via tout Mécanisme de Distribution Electronique ou autres méthodes connues aujourd'hui ou à découvrir à l'avenir, ainsi que le droit de concéder des sous-licences les droits énumérés précédemment à des tiers, à travers des systèmes multiples de sous-licences, selon les conditions de cette Licence.

Les droits de licence concédés dans cette Section B2 (« Concession de Licence du Contributeur ») deviennent effectifs à la première date que le Contributeur fait, pour la première fois, une Utilisation Commerciale la documentation.

Section C : OBLIGATIONS DE DISTRIBUTION

1°) Application de la licence.

Les modifications que vous créez ou auxquelles vous contribuez sont couvertes par cette licence, y compris sans limitation la Section B2 (« Concession de licence du Contributeur »). La documentation peut être distribuée seulement selon les conditions de cette licence ou toute version future publiée selon la Section D1 (« Versions de la licence »), et Vous devez intégrer une copie de cette licence dans chaque copie de la documentation que Vous distribuez. Vous ne pouvez offrir ou imposer des conditions qui modifient ou restreignent la version applicable de cette licence ou des droits concédés selon celle-ci. Toutefois, vous pouvez inclure un document additionnel qui offre les droits additionnels décrits à la Section C5 (« Notices nécessaires »).

2°) Disponibilité de la documentation.

Toute modification que Vous créez ou à laquelle Vous contribuez doit être disponible publiquement dans une Forme Éditée selon les conditions de cette Licence à travers un support tangible ou un Mécanisme de Distribution Électronique accepté.

3°) Description des modifications.

Toute documentation à laquelle vous contribuez doit identifier les modifications que vous avez effectuées dans la création du Document, ainsi que la date de telles modifications. Vous devez inclure une déclaration facilement visible indiquant que la modification est dérivée, directement ou indirectement de la documentation originale fournie par l'Auteur Initial et inclure le nom de l'Auteur Initial dans la documentation ou via un lien électronique qui décrit l'origine ou la propriété de la documentation. La documentation modifiée peut être créée par un programme électronique qui suit automatiquement les changements dans la documentation, et de tels changements doivent pouvoir être disponibles pour le public pendant au moins 5 ans après la première distribution de la documentation .

4°) Propriété Intellectuelle.

Le Contributeur garantit que celui-ci croit que ses modifications sont des créations originales du Contributeur, et/ou que le Contributeur détient des droits suffisants lui permettant de concéder les droits indiqués dans cette Licence.

5°) Notices nécessaires.

Vous devez reproduire la notice figurant dans l'Annexe dans chaque fichier de documentation. S'il n'est pas possible d'inclure une telle notice dans un fichier de documentation particulier, du fait de la structure du fichier, vous devez alors inclure une telle notice dans un endroit (tel qu'un répertoire) où un lecteur serait capable de chercher une telle notice, par exemple, via un hyperlien dans chaque fichier de la documentation qui renverra le lecteur vers une page qui décrit l'origine et la propriété de l'œuvre. Si vous avez créé une ou plusieurs modification(s) vous pouvez ajouter votre propre nom, en tant que Contributeur, à la notice décrite en Annexe.

Vous devez également reproduire cette licence dans tout fichier de documentation (ou mettre un hyperlien dans chaque fichier de la documentation) à l'endroit où vous expliquez les droits d'utilisateur ou de propriété.

Vous pouvez offrir à la vente, et faire payer, des services de garantie, soutien, indemnité ou responsabilité civile vis-à-vis d'un ou de plusieurs bénéficiaires de la documentation. Toutefois, vous ne pouvez faire ceci que sous votre propre responsabilité, et non pas sous la responsabilité de l'Auteur Initial ni un quelconque Contributeur. Vous devez faire clairement apparaître que toute garantie, soutien, indemnité ou responsabilité que vous offrez, est faite uniquement par vos soins, et vous marquez par la présente votre accord de dédommager l'Auteur Initial ainsi que chaque Contributeur par rapport à toute demande en garantie envers laquelle l'Auteur Initial ou tout Contributeur pourrait être appelé du fait des services de garantie, soutien, indemnité ou de responsabilité civile que vous offrez.

6°) Œuvre plus importante.

Vous pouvez créer une œuvre plus importante en combinant la documentation avec d'autres documents non couverts par la présente Licence et ainsi distribuer l'œuvre plus importante sous la forme d'un seul produit. Dans ce cas, vous devez vous assurer que les conditions de cette licence soient respectées pour la documentation.

Section D : Champ d'application de la licence

Cette Licence s'applique à la documentation à laquelle l'Auteur Initial a joint cette Licence et la notice qui apparaît en Annexe.

Section E : VERSIONS DE LA LICENCE

1°) Nouvelles Versions.

L'Auteur Initial peut publier des versions révisées et/ou nouvelles de la Licence de temps à autre.

2°) Effets des nouvelles versions.

Si la documentation a été publiée selon les conditions d'une version particulière de la licence, vous pouvez continuer à l'utiliser selon les conditions de cette version. Vous pouvez également décider d'utiliser une telle documentation selon les conditions de toute version ultérieure de la licence publiée par Robert Cabane. Personne d'autre que Robert Cabane n'a le droit de modifier les conditions de cette licence. Le fait de fournir le nom de l'auteur initial, la documentation originale ou le contributeur dans la notice décrite dans l'Annexe ne sera pas considéré comme une modification de cette Licence.

Section F : DÉCHARGE DE GARANTIE

LA DOCUMENTATION EST FOURNIE SELON LES CONDITIONS DE CETTE LICENCE « TEL QUEL », SANS GARANTIE AUCUNE, QU'ELLE SOIT EXPRESSE OU IMPLICITE, Y COMPRIS, SANS LIMITATION AUCUNE, SANS GARANTIE QUE LA DOCUMENTATION NE COMPORTE AUCUN DÉFAUT, NE SOIT COMMERCIALISABLE, NE CONVIENNE A UNE UTILISATION QUELCONQUE, NI NE SOIT CONSIDÉRÉE COMME UNE CONTREFRAÇON. LA TOTALITÉ DES RISQUES RELATIFS A LA QUALITÉ, PRÉCISION, ET EXECUTION DE LA DOCUMENTATION DEMEURE CHEZ VOUS. SI LA DOCUMENTATION S'AVÉRERAIT ÊTRE DÉFECTUEUSE PAR QUELQUE BIAIS QUE CE SOIT, VOUS (ET NON PAS L'AUTEUR INITIAL OU TOUT AUTRE CONTRIBUTEUR) DEVEZ ASSUMER LES FRAIS DE TOUT MAINTENANCE, REPARATION OU CORRECTION. CETTE DÉCHARGE DE GARANTIE CONSTITUE UNE PARTIE ESSENTIELLE DE CETTE LICENCE. AUCUNE UTILISATION DE LA DOCUMENTATION N'EST AUTORISÉE SANS L'APPLICATION DE CETTE DÉCHARGE.

Section G : RÉSILIATION

Cette licence, ainsi que les droits qui y sont concédés, sera résiliée de plein droit et de manière automatique si Vous ne respectez pas les conditions de celle-ci et si vous ne corrigez pas votre manquement à ses obligations dans un délai de 30 jours à partir du moment où vous avez connaissance d'un tel manquement. Toutes sous-licences de la Documentation qui ont été concédées en respect des obligations resteront en vigueur malgré la résiliation de cette licence. Toute clause qui, de par sa nature nécessite qu'elle survive à la résiliation, demeurera en vigueur.

Section H : LIMITATION DE RESPONSABILITÉ

DANS AUCUNE CIRCONSTANCE, OU SELON AUCUNE THÉORIE DE DROIT, QU'ELLE SOIT DELICTUELLE (Y COMPRIS NÉGLIGENCE), CONTRACTUELLE, OU DE QUELQU'AUTRE MANIÈRE QUE CE SOIT, L'AUTEUR INITIAL, TOUT AUTRE CONTRIBUTEUR, OU DISTRIBUTEUR DE LA DOCUMENTATION, OU TOUT FOURNISSEUR DE L'UNE QUELCONQUE DES PARTIES PRÉCÉDEMMENT NOMMÉES, NE POURRONT ÊTRE TENUS RESPONSABLE ENVERS QUICONQUE POUR TOUT DOMMAGE DIRECT, INDIRECT, PARTICULIER, INCIDENT, OU CONSÉQUENT DE QUELQUE NATURE QUE CE SOIT, COMPRENANT, SANS LIMITATION, DES DOMMAGES IMPUTABLES A LA PERTE D'UN FONDS DE COMMERCE, ARRÊT DE TRAVAIL, PANNE OU DYS-FONCTIONNEMENT D'ORDINATEUR, OU TOUS AUTRES DOMMAGES OU PERTES PROVOQUÉS PAR OU LIÉS À L'UTILISATION DE LA DOCUMENTATION, MÊME SI UNE TELLE PARTIE A ÉTÉ PRÉVENUE DE LA POSSIBILITÉ DE TELS DOMMAGES.

Section I : DISPOSITIONS FINALES

Cette Licence représente l'accord complet relatif à l'objet de celle-ci. Si une quelconque clause de cette Licence devrait être considérée comme nulle ou inapplicable, une telle clause ne sera modifiable que dans la mesure où elle puisse devenir applicable et valable. Dans tout différend ou litige dans l'application ou l'interprétation de cette licence, la partie perdante prendra en charges tous frais, y compris sans limitation, tous frais de procédure et des frais et dépenses d'avocats raisonnables. L'application de la Convention des Nations Unies régissant des Contrats pour la Vente Internationale de Marchandises est expressément exclue.

Section J : Annexe

La documentation originale s'intitule « XM' 1992, Math. I - Corrigé ». L'Auteur initial de la documentation originale est Robert Cabane. Copyright © 2005. Tous droits réservés. (Coordonnées de l'auteur initial : rcab AT free.fr).