Corrigé

Partie I
Étude de cas particuliers

1.a. On remarque que

$$\forall (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbf{N}^m, \qquad \sum_{i=1}^{n} x_i = t \Rightarrow (\forall i \in \{1, \ldots, m\},\, x_i \in \{0, \ldots, t\}).$$

Donc l'ensemble considéré est contenu dans $\{0, \ldots, t\}^m$. il est donc fini.

b. Soit $m \geqslant 2$.

$$\begin{aligned} N_1^m(t) &= \sharp\{\, (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbf{N}^m \mid \sum_{i=1}^{m} x_i = t \,\} \\ &= \sum_{k=0}^{t} \sharp\{\, (x_1, \ldots, x_{m-1}) \in \mathbf{N}^{m-1} \mid \sum_{i=1}^{m-1} x_i = t-k \,\} \\ &= \sum_{k=0}^{t} N_1^{m-1}(t-k) \\ &= \sum_{k=0}^{t} N_1^{m-1}(k). \end{aligned}$$

c. On montre le résultat par récurrence sur les entiers m et t. Pour $m = 1$, on a

$$N_1^1(t) = \sharp\{\, x \in \mathbf{N} \mid x = t \,\} = 1 = \binom{t}{0}.$$

Soit m un entier tel que $m \geqslant 2$; on suppose le résultat vérifié pour $m-1$. Pour $t = 0$, on a $N_1^m(0) = 1 = \binom{m-1}{m-1}$. Soit t un entier avec $t \geqslant 1$; supposons le résultat également vérifié pour $t-1$. Par la question **1.a**, on a alors les relations

$$\begin{aligned} N_1^m(t) &= \sum_{k=0}^{t} N_1^{m-1}(k) \\ &= N_1^{m-1}(t) + N_1^m(t-1) \\ &= \binom{t+m-2}{m-2} + \binom{t+m-2}{m-1} \\ &= \binom{t+m-1}{m-1}. \end{aligned}$$

d. On a

$$N_1^m(t) = \frac{\prod_{i=1}^{m-1}(t+i)}{(m-1)!} \underset{t \to +\infty}{\sim} \frac{t^{m-1}}{(m-1)!}.$$

2.a. L'image de la première application est $\{1\}$, celle de la seconde $\{0, 1, 4\}$.

b. Par la question précédente

$$\begin{aligned} &\{\,(x,y,z,t) \in (\mathbf{Z}/8\mathbf{Z})^\times \times (\mathbf{Z}/8\mathbf{Z})^3 \mid x^2+y^2+z^2+t^2 = 0\,\} \\ &= \{\,(x,y,z,t) \in (\mathbf{Z}/8\mathbf{Z})^\times \times (\mathbf{Z}/8\mathbf{Z})^3 \mid y^2+z^2+t^2 = 7\,\}. \end{aligned}$$

Mais, par la question précédente, on a

$$\{\,y^2+z^2+t^2,\ (y,z,t) \in (\mathbf{Z}/8\mathbf{Z})^3\,\} = \{0,1,2,3,4,5,6\}$$

et l'ensemble des solutions est vide.

c. Raisonnons par l'absurde. Supposons que $(X,Y,Z) \in \mathbf{Q}^3$ soit solution de l'équation. On écrit

$$X = \frac{x}{t}, \qquad Y = \frac{y}{t} \qquad \text{et} \qquad Z = \frac{z}{t}$$

avec $x, y, z, t \in \mathbf{Z}$ et $\operatorname{pgcd}(x,y,z,t) = 1$. On a alors

$$x^2+y^2+z^2 = (8b-1)t^2.$$

Notons $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{z}$ et $\overline{t}$ les images respectives de x, y, z et t dans $\mathbf{Z}/8\mathbf{Z}$. Comme $\operatorname{pgcd}(x,y,z,t) = 1$, l'un des entiers x, y, z, t est impair. Donc l'un des éléments $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{z}$, $\overline{t}$ appartient à $\mathbf{Z}/8\mathbf{Z}^\times$. Mais

$$\overline{x}^2+\overline{y}^2+\overline{z}^2+\overline{t}^2 = 0,$$

ce qui contredit la question précédente. Donc l'équation n'a pas de solution dans $\mathbf{Q}^3$.

d. On raisonne à nouveau par l'absurde. Si $(x,y,z) \in \mathbf{Z}^3$ vérifie

$$x^2+y^2+z^2 = 4^a(8b-1)$$

alors

$$\left(\frac{x}{2^a}\right)^2 + \left(\frac{y}{2^a}\right)^2 + \left(\frac{z}{2^a}\right)^2 = 8b-1,$$

ce qui contredit la conclusion de la question **c**. Donc l'équation n'a pas de solution dans $\mathbf{N}^3$.

Partie II

Somme de quatre carrés

1.a. Notons ψ ce morphisme. On a

$$\operatorname{Ker}(\psi) = \{\,x \in (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^\times \mid x^2 = 1\,\};$$

comme $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ est un corps, $\operatorname{Ker}(\psi) = \{-1, 1\}$.

b. Comme p est impair, le noyau de ψ est de cardinal 2. L'application ψ vérifie donc, pour tout z appartenant à $\mathrm{Im}(\psi)$, $\sharp\psi^{-1}(\{z\}) = 2$. Donc le cardinal de l'image de ψ est donné par

$$\sharp\,\mathrm{Im}(\psi) = \frac{1}{2}(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^\times = \frac{p-1}{2}.$$

Donc

$$\sharp\{\, x^2, x \in \mathbf{Z}/p\mathbf{Z} \,\} = 1 + \frac{p-1}{2} = \frac{p+1}{2}.$$

c. Comme l'application $x \mapsto -1-x$ est une bijection de $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ dans $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$, on a

$$\sharp\{\, -1-y^2, y \in \mathbf{Z}/p\mathbf{Z} \,\} = \sharp\{\, x^2, x \in \mathbf{Z}/p\mathbf{Z} \,\} = \frac{p+1}{2}.$$

Notons I l'intersection et U l'union des deux ensembles considérés on a

$$\sharp U = \sharp\{\, x^2, x \in \mathbf{Z}/p\mathbf{Z} \,\} + \sharp\{\, -1-y^2, y \in \mathbf{Z}/p\mathbf{Z} \,\} - \sharp I = p + 1 - \sharp I.$$

Comme $U \subset \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$, $\sharp U \leqslant p$. Par conséquent, $\sharp I \geqslant 1$ et l'intersection n'est pas vide.

d. D'après la question précédente, il existe x, y appartenant à $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ tels que $x^2 = -1-y^2$, c'est-à-dire $1 + x^2 + y^2 = 0$. Quitte à remplacer x par $-x$ (resp. y par $-y$), on peut supposer que $x \in \overline{\{0, \dots, \frac{p-1}{2}\}}$ (resp. $y \in \overline{\{0, \dots, \frac{p-1}{2}\}}$). On relève x (resp. y) en $\tilde{x} \in \{0, \dots, \frac{p-1}{2}\}$ (resp. $\tilde{y} \in \{0, \dots, \frac{p-1}{2}\}$). On a alors que $p \mid 1 + \tilde{x}^2 + \tilde{y}^2$ et il existe un entier relatif m tel que $1 + \tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 = mp$. Comme $0 \leqslant \tilde{x} \leqslant \frac{p-1}{2}$ et $0 \leqslant \tilde{y} \leqslant \frac{p-1}{2}$, on a

$$1 \leqslant mp \leqslant 1 + \left(\frac{p-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{p-1}{2}\right)^2 = 1 + \frac{p^2-2p+1}{4} \times 2 = \frac{p^2-2p+3}{2} < p^2$$

Donc $0 < m < p$.

2.a. On a $\boldsymbol{K} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Si $(a,b,c,d) \in \mathbf{R}^4$ vérifient

$$a + b\boldsymbol{I} + c\boldsymbol{J} + d\boldsymbol{K} = 0$$

alors

$$\begin{pmatrix} a+bi & -c-di \\ c-di & a-bi \end{pmatrix} = 0.$$

Donc $a = b = c = d = 0$. La famille $(\mathbf{1}, \boldsymbol{I}, \boldsymbol{J}, \boldsymbol{K})$ est donc libre et forme une base du $\mathbf{R}$-espace vectoriel $\mathbf{H}$.

La multiplication étant bilinéaire, il suffit de vérifier que

$$\forall a, b \in \{\, \mathbf{1}, \boldsymbol{I}, \boldsymbol{J}, \boldsymbol{K} \,\}, \qquad ab \in \mathbf{H}$$

ce qui résulte des relations

$$\boldsymbol{I}^2 = -\mathbf{1}, \qquad \boldsymbol{J}^2 = -\mathbf{1}, \qquad \boldsymbol{K}^2 = -\mathbf{1}$$

et

$$\boldsymbol{JI} = -\boldsymbol{K}, \qquad \boldsymbol{IK} = -\boldsymbol{J}, \qquad \boldsymbol{KI} = \boldsymbol{J}, \qquad \boldsymbol{JK} = \boldsymbol{I}, \qquad \boldsymbol{KJ} = -\boldsymbol{I}.$$

b. On a

$$\forall z, z' \in \mathbf{H}, \quad \forall \lambda \in \mathbf{R}, \qquad \tau(z + \lambda z') = \tau(z) + \lambda \tau(z')$$

et τ est $\mathbf{R}$-linéaire. Si $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ appartient à $\mathscr{M}_2(\mathbf{C})$, on note $\overline{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)}$ la matrice $\left(\begin{smallmatrix} \overline{a} & \overline{b} \\ \overline{c} & \overline{d} \end{smallmatrix}\right)$. On alors $\tau(M) = {}^t\overline{M}$ pour tout élément de $\mathbf{H}$. La relation cherchée résulte alors des relations

$$\forall M, N \in \mathscr{M}_2(\mathbf{C}), \qquad \overline{MN} = \overline{M}\,\overline{N} \qquad \text{et} \qquad {}^t(MN) = {}^tN\,{}^tM.$$

c. Pour tout z de $\mathbf{H}$, on a $\tau(z\tau(z)) = \tau^2(z)\tau(z) = z\tau(z)$, donc $z\tau(z)$ appartient à $\mathbf{R1}$; Comme $z + \tau(z) \in \mathbf{R1}$ commute avec z, $z\tau(z) = \tau(z)z$. Ceci démontre l'existence de l'application N. Si $z = a + b\boldsymbol{I} + c\boldsymbol{J} + d\boldsymbol{K}$, alors

$$z\tau(z) = \tau(z)z = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \in \mathbf{R1}.$$

d. Pour $z_1, z_2 \in \mathbf{H}$, on a les relations

$$N(z_1 z_2) = z_1 z_2 \tau(z_1 z_2) = z_1 z_2 \tau(z_2)\tau(z_1).$$

Comme $z_2\tau(z_2) \in \mathbf{R}$, on en déduit que

$$N(z_1 z_2) = z_1\tau(z_1) z_2\tau(z_2) = N(z_1)N(z_2).$$

3. Notons

$$\mathscr{H} = \{\, a + b\boldsymbol{I} + c\boldsymbol{J} + d\boldsymbol{K}, (a,b,c,d) \in \mathbf{Z}^4 \,\}$$

alors on a $\mathscr{N}_2^4 = N(\mathscr{H})$. Si $a, a' \in \mathscr{N}_2^4$ et $z, z' \in \mathscr{H}$ vérifient $a = N(z)$ et $a' = N(z')$, alors $aa' = N(zz')$. Mais $zz' \in \mathscr{H}$ et $aa' \in \mathscr{N}_2^4$.

4.a. Cela résulte de la question **1.d**.

b.(i) Le produit mp est pair, donc le nombre d'entiers impairs parmi $\{\, x_1, x_2, x_3, x_4 \,\}$ est pair. Il existe donc une permutation σ de $\mathfrak{S}_4$ telle que $x_{\sigma(1)} \equiv x_{\sigma(2)} \bmod 2$, $x_{\sigma(3)} \equiv x_{\sigma(4)} \bmod 2$, $x_{\sigma(1)} \geqslant x_{\sigma(2)}$ et $x_{\sigma(3)} \geqslant x_{\sigma(4)}$. Par conséquent, $x_{\sigma(1)} + x_{\sigma(2)}$, $x_{\sigma(1)} - x_{\sigma(2)}$, $x_{\sigma(3)} + x_{\sigma(4)}$ et $x_{\sigma(3)} - x_{\sigma(4)}$ sont tous les quatre pairs et positifs.

(ii) On a

$$\frac{mp}{2} = \left(\frac{x_{\sigma(1)} + x_{\sigma(2)}}{2}\right)^2 + \left(\frac{x_{\sigma(1)} - x_{\sigma(2)}}{2}\right)^2 + \left(\frac{x_{\sigma(3)} + x_{\sigma(4)}}{2}\right)^2 + \left(\frac{x_{\sigma(3)} - x_{\sigma(4)}}{2}\right)^2 \in \mathscr{N}_2^4.$$

c. Compte tenu de la question précédente, la minimalité de m_0 entraîne que m_0 est impair.

d.(i) L'entier m_0 est impair. On peut donc choisir des entiers b_i de sorte que $y_i = x_i - b_i m_0$ vérifie

$$|y_i| < \frac{1}{2} m_0 \qquad \text{pour } i \in \{\, 1, 2, 3, 4 \,\}.$$

On a alors

$$y_1^2+y_2^2+y_3^2+y_4^2 < 4\frac{1}{4}m_0^2 = m_0^2.$$

D'autre part, si $y_1^2+y_2^2+y_3^2+y_4^2=0$, alors $y_1=y_2=y_3=y_4=0$, ce qui entraîne que m_0 divise les entiers x_1, x_2, x_3 et x_4. Donc $m_0^2 \mid x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2 = m_0 p$. D'où $m_0 \mid p$, ce qui contredit le fait que $1 < m_0 < p$. Donc $0 < y_1^2+y_2^2+y_3^2+y_4^2$. Enfin

$$y_1^2+y_2^2+y_3^2+y_4^2 \equiv x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2 \equiv m_0 p \equiv 0 \bmod m_0.$$

(ii) On a

$$y_1^2+y_2^2+y_3^2+y_4^2 = m_1 m_0$$

Par la question **2.d**,

$$\begin{aligned} m_1 m_0^2 p &= N(x_1+x_2\boldsymbol{I}+x_3\boldsymbol{J}+x_4\boldsymbol{K})N(y_1-y_2\boldsymbol{I}-y_3\boldsymbol{J}-y_4\boldsymbol{K}) \\ &= N((x_1+x_2\boldsymbol{I}+x_3\boldsymbol{J}+x_4\boldsymbol{K})(y_1-y_2\boldsymbol{I}-y_3\boldsymbol{J}-y_4\boldsymbol{K})) \end{aligned}$$

Notons z_1, z_2, z_3 et z_4 les coordonnées du produit dans la base $(\mathbf{1},\boldsymbol{I},\boldsymbol{J},\boldsymbol{K})$. On a $z_1 = (x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)+x_1(y_1-x_1)+x_2(y_2-x_2)+x_3(y_3-x_3)+x_4(y_4-x_4)$. Donc $m_0 \mid z_1$. Par ailleurs

$$\begin{aligned} z_2 &= -x_1y_2+x_2y_1-x_3y_4+x_4y_3 \equiv 0 \bmod m_0 \\ z_3 &= -x_1y_3+x_3y_1+x_2y_4-x_4y_2 \equiv 0 \bmod m_0 \\ z_4 &= -x_1y_4+x_4y_1-x_2y_3+x_3y_2 \equiv 0 \bmod m_0. \end{aligned}$$

Le quadruplet $(|z_1|,|z_2|,|z_3|,|z_4|)$ convient. Notons qu'on obtient, en divisant les z_i par m_0, que $m_1 p \in \mathscr{N}_2^4$.

e. Si $m_0 \neq 1$, la question précédente fournit $m_1 < m_0$ tel que $m_1 p \in \mathscr{N}_2^4$, ce qui contredit la définition de m_0.

5. Par la question **4**, tout nombre premier impair appartient à $\mathscr{N}_2^4$. Or $2 = 1+1 \in \mathscr{N}_2^4$ et $0, 1 \in \mathscr{N}_2^4$. Comme $\mathscr{N}_2^4$ est stable par multiplication d'après la question **3** et que tout nombre entier strictement positif est produit de nombres premiers, on obtient que $\mathbf{N} = \mathscr{N}_2^4$.

Partie III

Les fonctions g et G.

1.a. On a $t = 2^d\left\lfloor\left(\frac{3}{2}\right)^d\right\rfloor - 1 < 3^d$. Si $t = \sum_{i=1}^m x_i^d$ avec $(x_1,\ldots,x_m) \in \mathbf{N}^m$, alors on en déduit $x_i^d < 3^d$, puis $x_i < 3$ pour $i \in \{1,\ldots,m\}$.

b. Si $t = \sum_{i=1}^m x_i^d$, alors $t = N_1 + 2^d N_2$ où

$$N_i = \sharp\{\, j \in \{\, 1, \dots, m \,\} \mid x_j = i \,\}$$

pour $i \in \{1, 2\}$. Par conséquent

$$N_2 \leqslant \left\lfloor \frac{t}{2^d} \right\rfloor \leqslant \left\lfloor \left(\frac{3}{2}\right)^d \right\rfloor - 1.$$

On obtient donc l'inégalité

$$\begin{aligned} m \geqslant N_1 + N_2 = t - 2^d N_2 + N_2 &= 2^d \left\lfloor \left(\frac{3}{2}\right)^d \right\rfloor - 1 - 2^d N_2 + N_2 \\ &= 2^d - 1 + 2^d \left(\left\lfloor \left(\frac{3}{2}\right)^d \right\rfloor - 1 - N_2 \right) + N_2. \end{aligned}$$

Le terme de droite est minimal pour $N_2 = \left\lfloor \left(\frac{3}{2}\right)^d \right\rfloor - 1$ donc $m \geqslant 2^d - 1 + \left\lfloor \left(\frac{3}{2}\right)^d \right\rfloor - 1$, ce qui prouve que

$$g(d) \geqslant 2^d + \left\lfloor \left(\frac{3}{2}\right)^d \right\rfloor - 2.$$

2. Par définition, si $g(d)$ est fini, alors $G(d)$ est fini et $G(d) \leqslant g(d)$. Si $G(d) = m$, soit t_0 un entier tel que pour tout entier $t \geqslant t_0$, il existe $(x_1, \dots, x_m) \in \mathbf{N}^m$ tel que $t = \sum_{i=1}^m x_i^d$. Si $t \leqslant t_0$, $t = t\, 1^d$. Par conséquent $g(d) \leqslant \max(G(d), t_0)$.

3. Par la partie I, $G(2) \geqslant 4$. Par la partie II, $g(2) \leqslant 4$. On obtient donc $4 \leqslant G(2) \leqslant g(2) \leqslant 4$. Donc

$$g(2) = G(2) = 4.$$

La minoration fournie par la question **1.b** est $g(2) \geqslant 2^2 + \left\lfloor \left(\frac{3}{2}\right)^2 \right\rfloor - 2 = 4$. Cette borne est donc atteinte pour $d = 2$.

Partie IV

Expression intégrale

1. On a les relations

$$\int_0^1 e^{2i\pi n\alpha}\, \mathrm{d}\alpha = \frac{1}{2i\pi n} \left[e^{2i\pi n\alpha} \right]_0^1 = 0 \text{ si } n \neq 0$$

et

$$\int_0^1 e^{2i\pi n\alpha}\, \mathrm{d}\alpha = 1 \text{ si } n = 0.$$

2. L'ensemble $\mathbf{Z}^m \cap [0, B]^m$ est fini. Par conséquent

$$\int_0^1 \sum_{\boldsymbol{x} \in \mathbf{Z}^m \cap [0,B]^m} e^{2i\pi (f_d^m(\boldsymbol{x}) - t)\alpha}\, \mathrm{d}\alpha = \sum_{\boldsymbol{x} \in \mathbf{Z}^m \cap [0,B]^m} \int_0^1 e^{2i\pi (f_d^m(\boldsymbol{x}) - t)\alpha}\, \mathrm{d}\alpha = N_d^m(t, B).$$

3. Si $t=\sum_{i=1}^m x_i^d$ avec $(x_1,\dots,x_m)\in\mathbf{N}^m$, alors $x_i\in\mathbf{N}\cap[0,t^{1/d}]$ pour $i\in\{1,\dots,m\}$. Donc $N_d^m(t)=N_d^m(t,B)$ si $B\geqslant t^{1/d}$.

Partie V

Majoration de sommes d'exponentielles

1.a. Par définition,

$$\phi_2(g_1g_2)=\phi(0)-\phi(g_1)-\phi(g_2)+\phi(g_1+g_2).$$

b. Soit $(g_1,\dots,g_{k-1})\in G^{k-1}$. On a

$$\phi_k(g_1,\dots,g_{k-1},0)=\sum_{(\epsilon_1,\dots,\epsilon_{k-1})\in\{0,1\}^{k-1}}(-1)^{\sum_{i=1}^{k-1}\epsilon_i}\phi(\sum_{i=1}^{k-1}\epsilon_ig_i)-\sum_{(\epsilon_1,\dots,\epsilon_{k-1})\in\{0,1\}^{k-1}}(-1)^{\sum_{i=1}^{k-1}\epsilon_i}\phi(\sum_{i=1}^{k-1}\epsilon_ig_i)=0.$$

c. Soit $(g_1,\dots,g_{k+1})\in G^{k+1}$. On a les relations

$$\phi_{k+1}(g_1,\dots,g_{k+1})=\sum_{(\epsilon_1,\dots,\epsilon_{k+1})\in\{0,1\}^{k+1}}(-1)^{\epsilon_1+\cdots+\epsilon_{k+1}}\phi\Big(\sum_{i=1}^{k+1}\epsilon_ig_i\Big)$$

et

$$\begin{aligned}
&\phi_k(g_1,\dots,g_k)+\phi_k(g_1,\dots,g_{k-1},g_{k+1})-\phi_k(g_1,\dots,g_{k-1},g_k+g_{k+1})\\
&=\sum_{(\epsilon_1,\dots,\epsilon_k)\in\{0,1\}^k}(-1)^{\epsilon_1+\cdots+\epsilon_k}\phi\Big(\sum_{i=1}^{k}\epsilon_ig_i\Big)\\
&\qquad+\sum_{(\epsilon_1,\dots,\epsilon_k)\in\{0,1\}^k}(-1)^{\epsilon_1+\cdots+\epsilon_k}\phi\Big(\sum_{i=1}^{k-1}\epsilon_ig_i+\epsilon_kg_{k+1}\Big)\\
&\qquad-\sum_{(\epsilon_1,\dots,\epsilon_k)\in\{0,1\}^k}(-1)^{\epsilon_1+\cdots+\epsilon_k}\phi\Big(\sum_{i=1}^{k-1}\epsilon_ig_i+\epsilon_k(g_k+g_{k+1})\Big)\\
&=\sum_{(\epsilon_1,\dots,\epsilon_{k+1})\in\{0,1\}^{k-1}\times\{0,1\}\times\{0\}}(-1)^{\epsilon_1+\cdots+\epsilon_{k+1}}\phi\Big(\sum_{i=1}^{k+1}\epsilon_ig_i\Big)\\
&\qquad+\sum_{(\epsilon_1,\dots,\epsilon_{k+1})\in\{0,1\}^{k-1}\times\{0\}\times\{0,1\}}(-1)^{\epsilon_1+\cdots+\epsilon_{k+1}}\phi\Big(\sum_{i=1}^{k+1}\epsilon_ig_i\Big)\\
&\qquad-\sum_{(\epsilon_1,\dots,\epsilon_{k+1})\in\{0,1\}^{k-1}\times\{0\}\times\{0\}}(-1)^{\epsilon_1+\cdots+\epsilon_{k+1}}\phi\Big(\sum_{i=1}^{k+1}\epsilon_ig_i\Big)\\
&\qquad+\sum_{(\epsilon_1,\dots,\epsilon_{k+1})\in\{0,1\}^{k+1}\times\{1\}\times\{1\}}(-1)^{\epsilon_1+\cdots+\epsilon_{k+1}}\phi\Big(\sum_{i=1}^{k+1}\epsilon_ig_i\Big)\\
&=\phi_{k+1}(g_1,\dots,g_{k+1}).
\end{aligned}$$

d. Cela résulte de la définition et du fait que les groupes G et H sont abéliens.

2.a. Par la question **1.a**, on a

$$\phi_2(a_1,a_2)=\phi(0)-\phi(a_1)-\phi(a_2)+\phi(a_1+a_2)=(a_1+a_2)^n-a_1^n-a_2^n=\sum_{i=1}^{n-1}\binom{n}{i}a_1^ia_2^{n-i}.$$

b. L'anneau A étant commutatif, on déduit par récurrence de la formule du binôme que, pour tout $d\geqslant 0$, pour tout $n\geqslant 1$ et tout $(a_1,\dots,a_n)$ appartenant à A^n,

$$(a_1+\cdots+a_n)^d=\sum_{\alpha_1+\cdots+\alpha_n=d}\frac{d!}{\alpha_1!\dots\alpha_n!}a_1^{\alpha_1}\cdots a_n^{\alpha_n}.$$

Donc

$$\begin{aligned}\phi_n(a_1,\dots,a_n)&=\sum_{(\epsilon_1,\dots,\epsilon_n)\in\{0,1\}^n}(-1)^{\epsilon_1+\cdots+\epsilon_n}\Big(\sum_{i=1}^n\epsilon_ia_i\Big)^n\\&=\sum_{(\epsilon_1,\dots,\epsilon_n)\in\{0,1\}^n}(-1)^{\epsilon_1+\cdots+\epsilon_n}\sum_{\alpha_1+\cdots+\alpha_n=n}\frac{n!}{\alpha_1!\dots\alpha_n!}(\epsilon_1a_1)^{\alpha_1}\cdots(\epsilon_na_n)^{\alpha_n}\\&=n!\sum_{\alpha_1+\cdots+\alpha_n=n}\frac{\prod_{i=1}^n a_i^{\alpha_i}}{\alpha_1!\dots\alpha_n!}\sum_{(\epsilon_1,\dots,\epsilon_n)\in\{0,1\}^n}(-1)^{\epsilon_1+\cdots+\epsilon_n}\prod_{i=1}^n\epsilon_i^{\alpha_i}.\end{aligned}$$

Mais un produit de la forme $\prod_{i=1}^n\epsilon_i^{\alpha_i}$ est nul s'il existe $i\in\{1,\dots,n\}$ avec $\alpha_i>0$ et $\epsilon_i=0$. Soit $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\mathbf{N}^n$ avec $\alpha_1+\cdots+\alpha_n=n$. Notons N_0 le nombre d'entiers $i\in\{1,\dots,n\}$ tels que $\alpha_i=0$. On obtient que

$$\sum_{(\epsilon_1,\dots,\epsilon_n)\in\{0,1\}^n}(-1)^{\epsilon_1+\cdots+\epsilon_n}\prod_{i=1}^n\epsilon_i^{\alpha_i}=(-1)^{n-N_0}\sum_{(\epsilon_1,\dots,\epsilon_{N_0})\in\{0,1\}^{N_0}}(-1)^{\sum_{i=1}^{N_0}\epsilon_i}=(-1)^{n-N_0}(1-1)^{N_0},$$

qui est nul si $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\neq(1,\dots,1)$. Donc

$$\phi_n(a_1,\dots,a_n)=(-1)^nn!a_1\cdots a_n.$$

3. Soit $(g_1,\dots,g_k)\in G^k$. On a

$$\begin{aligned}U(g_1,\dots,g_k)&=\Bigg(\bigcap_{(\epsilon_1,\dots,\epsilon_{k-1})\in\{0,1\}^{k-1}}U-\Big(\sum_{i=1}^{k-1}\epsilon_ig_i\Big)\Bigg)\cap\Bigg(\bigcap_{(\epsilon_1,\dots,\epsilon_{k-1})\in\{0,1\}^{k-1}}U-\Big(\sum_{i=1}^{k-1}\epsilon_ig_i\Big)-g_k\Bigg)\\&=U(g_1,\dots,g_{k-1})(g_k).\end{aligned}$$

4.a. On a les égalités

$$|S|^2=S\overline{S}=\Big(\sum_{g\in U}\mathbf{e}(\phi(g))\Big)\Big(\sum_{g\in U}\overline{\mathbf{e}(\phi(g))}\Big)=\sum_{(g,h)\in U^2}\mathbf{e}(\phi(g)-\phi(h)).$$

b. On considère l'application

$$\begin{array}{ccc}U\times U&\longrightarrow&G\times G\\(g,h)&\longmapsto&(g-h,h)\end{array}$$

Cette application est injective, d'image

$$\{\,(g_1,g_2)\in U^D\times G\mid g_2\in U(g_1)\,\};$$

En effet pour tout élément (g_1, g_2) de cet ensemble, son unique antécédent est donné par $(g_1 + g_2, g_2)$, qui appartient bien à $U \times U$ par définition de $U(g_1)$.

c. Par la question **1.a** et la question précédente,

$$\begin{aligned}
|S|^2 &\leqslant \sum_{g_1 \in U^D} \left| \sum_{g_2 \in U(g_1)} \mathbf{e}(\phi_2(g_1, g_2) + \phi(g_1) - \phi(0)) \right| \\
&\leqslant \sum_{g_1 \in U^D} |\mathbf{e}(\phi(g_1) - \phi(0))| \left| \sum_{g_2 \in U(g_1)} \mathbf{e}(\phi_2(g_1, g_2)) \right| \\
&\leqslant \sum_{g_1 \in U^D} \left| \sum_{g_2 \in U(g_1)} \mathbf{e}(\phi_2(g_1, g_2)) \right|.
\end{aligned}$$

5.a. La fonction $x \mapsto x^2$ de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ est convexe. Donc, pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$,

$$(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i)^2 \leqslant \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^2.$$

b. La formule a été démontrée pour $k = 2$. Supposons-la vérifiée pour k et montrons la pour $k + 1$.

$$\begin{aligned}
|S|^{2^k} &= \left(|S|^{2^{k-1}}\right)^2 \\
&\leqslant \left((\sharp U^D)^{2^{k-1}-k}\right)^2 \left(\sum_{(g_1, \ldots, g_{k-1}) \in (U^D)^{k-1}} \left| \sum_{g_k \in U(g_1, \ldots, g_{k-1})} \mathbf{e}(\phi_k(g_1, \ldots, g_k)) \right| \right)^2 \\
&\leqslant (\sharp U^D)^{2^k - 2k} (\sharp U^D)^{k-1} \sum_{(g_1, \ldots, g_{k-1}) \in (U^D)^{k-1}} \left| \sum_{g_k \in U(g_1, \ldots, g_{k-1})} \mathbf{e}(\phi_k(g_1, \ldots, g_k)) \right|^2,
\end{aligned}$$

où la dernière inégalité résulte de la question précédente. En appliquant le cas $k = 2$ aux fonctions $\phi_{g_1, \ldots, g_{k-1}} : g_k \mapsto \phi_k(g_1, \ldots, g_k)$, on obtient

$$|S|^{2^k} \leqslant (\sharp U^D)^{2^{(k+1)-1}-(k+1)} \sum_{(g_1, \ldots, g_{k-1}, g_k) \in (U^D)^k} \left| \sum_{g_{k+1} \in U(g_1, \ldots, g_{k-1})(g_k)} \mathbf{e}((\phi_{g_1, \ldots, g_{k-1}})_2(g_k, g_{k+1})) \right|$$

Mais, d'après les questions **1.a**, **1.b** et **1.c**,

$$\begin{aligned}
&(\phi_{g_1, \ldots, g_{k-1}})_2(g_k, g_{k+1}) \\
&= \phi_k(g_1, \ldots, g_{k-1}, 0) - \phi_k(g_1, \ldots, g_{k-1}, g_k) - \phi_k(g_1, \ldots, g_{k-1}, g_{k+1}) + \phi_k(g_1, \ldots, g_{k-1}, g_k + g_{k+1}) \\
&= -\phi_{k+1}(g_1, \ldots, g_{k+1}).
\end{aligned}$$

Enfin, il résulte de la question **3** que $U(g_1, \ldots, g_{k-1})(g_k) = U(g_1, \ldots, g_k)$.

6.a. On a

$$\left| \sum_{j=a}^{b} \mathbf{e}(\alpha n j) \right| \leqslant \sum_{j=a}^{b} |\mathbf{e}(\alpha n j)| \leqslant b - a + 1.$$

Si $\mathbf{e}(\alpha n) \neq 1$, on a en outre

$$\left|\sum_{j=a}^{b} \mathbf{e}(\alpha n j)\right| = \left|\frac{\mathbf{e}(\alpha n a) - \mathbf{e}(\alpha n(b+1))}{1-\mathbf{e}(\alpha n)}\right| \leqslant \frac{2}{|1-\mathbf{e}(\alpha n)|}.$$

b. Soient a et b des nombres réels. On a que $\|a\| = \min(a - \lfloor a \rfloor, 1 + \lfloor a \rfloor - a)$, il existe donc un entier k tel que $\|a\| = |a-k|$. De même soit l un entier tel que $|b-l| = \|b\|$. On a

$$\|a+b\| \leqslant |a+b-(k+l)| \leqslant |a-k| + |b-l| \leqslant \|a\| + \|b\|.$$

c. Supposons d'abord que $x \in [0, \frac{1}{2}]$. On a les relations

$$|1-\mathbf{e}(x)| = |\mathbf{e}(x/2) - \mathbf{e}(-x/2)| = 2|\sin(\pi x)|.$$

Comme la fonction $t \mapsto \sin(\pi t)$ est concave sur $[0, \frac{1}{2}]$, on a $\sin(\pi x) \geqslant 2x$. Il en résulte que $|1-\mathbf{e}(x)| \geqslant 4\|x\|$. Comme les fonctions $x \mapsto |1-\mathbf{e}(x)|$ et $x \mapsto \|x\|$ sont paires et 1-périodiques, le résultat est vrai pour tout $x \in \mathbf{R}$.

d. On applique la question **5.b** avec $U = \mathbf{Z} \cap [0, B]$ et $\phi : n \mapsto \alpha n^d$, ce qui donne la majoration

$$|S_B^1(\alpha)|^{2^{d-1}} \leqslant (\sharp U^D)^{2^{d-1}-d} \sum_{(n_1,\ldots,n_{d-1}) \in (U^D)^{d-1}} |\sum_{n_d \in U(n_1,\ldots,n_{d-1})} \mathbf{e}(\phi_d(n_1,\ldots,n_d))|.$$

D'après la question **2.b**, pour tous entiers $n_1, \ldots, n_d$,

$$\phi_d(n_1,\ldots,n_d) = (-1^d)d!\alpha n_1 \cdots n_d.$$

D'autre part pour toute famille d'entiers $(n_1,\ldots,n_{d-1}) \in \mathbf{Z}^{d-1}$, $U(n_1,\ldots,n_{d-1})$ est l'intersection de $\mathbf{Z}$ avec un intervalle de longueur $\leqslant B$. En appliquant les questions **a** et **c**, on obtient que

$$|\sum_{n_d \in U(n_1,\ldots,n_{d-1})} \mathbf{e}((-1)^d d!\alpha n_1 \cdots n_d)| \leqslant \min\left(\frac{2}{\|d! n_1 \cdots n_{d-1}\alpha\|}, B+1\right).$$

et $\sharp U^D \leqslant \sharp([-B,B] \cap \mathbf{Z}) \leqslant 2B+1$.

e.(i) On a la relation

$$N_B^\alpha = \sum_{(n_1,\ldots,n_{d-2}) \in ([-B,B]\cap\mathbf{Z})^{d-2}} M_B^\alpha(n_1,\ldots,n_{d-2}).$$

(ii) On considère l'ensemble fini

$$\left\{ n_{d-1} \in [-B,B] \cap \mathbf{Z} \,\middle|\, \{d! n_1 \cdots n_{d-1}\alpha\} \in \left[\frac{\delta}{B}, \frac{\delta+1}{B}\right[\right\}$$

Si cet ensemble est vide, le résultat est vérifié. Dans le cas contraire, soit n_{d-1}^0 (resp. n_{d-1}^1) son plus petit (resp. plus grand) élément. Soit n_{d-1} un élément de cet ensemble. Soit $i \in \{0,1\}$ tel que $|n_{d-1} - n^i_{d-1}|$ soit minimal. On a $n_{d-1} - n^i_{d-1} \in [-B, B]$ Notons $x = d!n_1 \cdots n_{d-1}\alpha$ et $x^i = d!n_1 \cdots n^i_{d-1}\alpha$. On a

$$x - \lfloor x \rfloor \in \left[\frac{\delta}{B}, \frac{\delta+1}{B}\right[\qquad \text{et} \qquad x^i - \lfloor x^i \rfloor \in \left[\frac{\delta}{B}, \frac{\delta+1}{B}\right[$$

Donc $\|x - x^i\| < 1/B$. Autrement dit $n_{d-1} - n^i_{d-1}$ appartient à l'ensemble

$$\left\{ n'_{d-1} \in [-B, B] \cap \mathbf{Z} \,\middle|\, \|d!n_1 \cdots n_{d-2} n'_{d-1}\alpha\| < \frac{1}{B} \right\}$$

ce qui prouve l'inégalité demandée.

(iii) Quitte à remplacer B par $\lfloor B \rfloor$, on peut supposer B entier. Soit $(n_1, \ldots, n_{d-2}) \in \mathbf{N}^{d-2}$. On cherche à majorer

$$\begin{aligned}
&\sum_{n_{d-1} \in [-B,B] \cap \mathbf{Z}} \min\left(B+1, \frac{2}{\|\alpha d! n_1 \cdots n_{d-1}\|}\right) \\
&= \sum_{\delta \in [0,B[\cap \mathbf{Z}} \ \sum_{\left\{n_{d-1} \in [-B,B] \cap \mathbf{Z} \,\middle|\, \{d!n_1 \cdots n_{d-1}\alpha\} \in [\frac{\delta}{B}, \frac{\delta+1}{B}[\right\}} \min\left(B+1, \frac{2}{\|\alpha d! n_1 \cdots n_{d-1}\|}\right).
\end{aligned}$$

Mais si $\{d!n_1 \cdots n_{d-1}\alpha\} \in [\frac{\delta}{B}, \frac{\delta+1}{B}[$, alors

$$\min\left(B+1, \frac{2}{\|\alpha d! n_1 \cdots n_{d-1}\|}\right) \leqslant \min\left(B+1, \frac{2B}{\delta}, \frac{2B}{B-\delta-1}\right).$$

La somme ci-dessus est donc majorée par

$$\begin{aligned}
&(2(B+1) + 4B \sum_{\delta=1}^{\lfloor \frac{B+1}{2} \rfloor} \frac{1}{\delta}) 2M^\alpha_B(n_1, \ldots, n_{d-2}) \\
&\leqslant 4(B + 2B(\ln(B)+1) + 1) M^\alpha_B(n_1, \ldots, n_{d-2}) \\
&\leqslant 8(2B+1)(\ln(B)+1) M^\alpha_B(n_1, \ldots, n_{d-2}).
\end{aligned}$$

On obtient le résultat en sommant sur $(n_1, \ldots, n_{d-2})$ et en utilisant les questions **d** et **e.(i)**.

7.a. Par la question **6.b**, on a la relation

$$\|\alpha(x_0 + y) - \alpha(x_0 + y')\| \leqslant \frac{2}{B}.$$

Donc $\|\alpha(y - y')\| \leqslant \frac{2}{B}$. Comme $|\alpha - \frac{a}{q}| < \frac{1}{q^2}$ et $|y - y'| < q$, on a

$$\left|\left(\alpha - \frac{a}{q}\right)(y - y')\right| \leqslant \frac{1}{q}.$$

Donc $\left\|\left(\alpha - \frac{a}{q}\right)(y - y')\right\| \leqslant \frac{1}{q}$ et

$$\left\|\frac{a}{q}(y - y)\right\| \leqslant \frac{1}{q} + \frac{2}{B}$$

b. Comme a est inversible dans $\mathbf{Z}/q\mathbf{Z}$, l'application $\overline{z} \mapsto a\overline{z}$ de $\mathbf{Z}/q\mathbf{Z}$ dans $\mathbf{Z}/q\mathbf{Z}$ est bijective. Mais $\|\frac{az}{q}\| \leqslant \delta$ si et seulement si la classe $a\overline{z}$ de az dans $\mathbf{Z}/q\mathbf{Z}$ vérifie $a\overline{z} \in \{-\overline{\lfloor \delta q \rfloor}, \dots, \overline{\lfloor \delta q \rfloor}\}$.

c. Le résultat est vrai si l'ensemble considéré est vide ; dans le cas contraire, cela résulte des questions **a** et **b**.

d. On découpe l'intervalle $[1, d!B^{d-1}]$ en $\frac{d!B^{d-1}}{q} + 1$ intervalles de longueur q et on applique la question **c**.

8.a. Cela résulte du fait que si $\mathrm{pgcd}(a,b) = 1$, on a une bijection

$$\begin{array}{rcl} \{k \in \mathbf{N} \mid k \text{ divise } a\} \times \{l \in \mathbf{N} \mid l \text{ divise } b\} & \longrightarrow & \{q \in \mathbf{N} \mid q \text{ divise } ab\} \\ (k,l) & \longmapsto & kl. \end{array}$$

dont l'application réciproque est donnée par

$$q \mapsto (\mathrm{pgcd}(q,a), \mathrm{pgcd}(q,b)).$$

b. Si p est un nombre premier, $\tau(p^n) = n + 1 = \ln(p^n)/\ln(p) + 1$. Donc, il existe un nombre réel $C_{p,\epsilon}$ tel que $\tau(p^n) \leqslant C_{p,\epsilon} p^{n\epsilon}$ pour tout entier $n \in \mathbf{N}$. En outre il existe un nombre premier p_0 tel que $\tau(p^n) \leqslant p^{n\epsilon}$ pour tout nombre premier $p \geqslant p_0$ et tout $n \in \mathbf{N}$. Notons $\mathscr{P}$ l'ensemble des nombres premiers. Pour tout nombre entier strictement positif a, si $a = \prod_{p \in \mathscr{P}} p^{v_p(a)}$ est la décomposition de a en produit de facteurs irréductibles,

$$\tau(a) = \prod_{p \in \mathscr{P}} \tau(p^{v_p(a)}) \leqslant (\prod_{p \leqslant p_0} C_{p,\epsilon}) a^\epsilon.$$

9. On applique les questions **6.e.(iii)**, **7.d** et **8.b** et, en utilisant le fait que $d \geqslant 2$, on obtient qu'il existe des constantes C et C' telles que

$$\begin{aligned} |S_B^1(\alpha)|^{2^{d-1}} &\leqslant C B^{2^{d-1}-d+1} B^{\epsilon 2^{d-1}} q \left(\frac{1}{B} + \frac{1}{q}\right)\left(\frac{B^{d-1}}{q} + 1\right) \\ &\leqslant C B^{2^{d-1}+\epsilon 2^{d-1}} \left(\frac{1}{B} + \frac{1}{q}\right)\left(1 + \frac{q}{B^{d-1}}\right) \\ &\leqslant C B^{2^{d-1}+\epsilon 2^{d-1}} \left(\frac{1}{B} + \frac{1}{q} + \frac{q}{B^d} + \frac{1}{B^{d-1}}\right) \\ &\leqslant C' B^{2^{d-1}+\epsilon 2^{d-1}} \left(\frac{1}{B} + \frac{1}{q} + \frac{q}{B^d}\right). \end{aligned}$$

10.a. Pour des raisons de cardinal, l'application

$$\begin{array}{rcl} \{0, \dots, N\} & \longrightarrow & \{0, \dots, N-1\} \\ j & \longmapsto & \lfloor N \{j\alpha\} \rfloor \end{array}$$

n'est pas injective. Il existe donc $j, k \in \{0, \dots, N\}$ avec $j < k$ tels que les nombre réels $\{j\alpha\}$ et $\{k\alpha\}$ appartiennent au même intervalle.

b. On reprend les notations de **a**. On pose $b = \lfloor k\alpha \rfloor - \lfloor j\alpha \rfloor$. On a $|k\alpha - j\alpha - b| < \frac{1}{N}$ et $j < k$. Donc $|(k-j)\alpha - b| < \frac{1}{N}$. En posant

$$q = \frac{k-j}{\operatorname{pgcd}(k-j,b)} \leqslant N \qquad \text{et} \qquad a = \frac{b}{\operatorname{pgcd}(k-j,b)},$$

on obtient $|\alpha - \frac{a}{q}| < \frac{1}{Nq}$.

11.a. On a, par définition

$$\mathfrak{M}_\Delta(B,1,1) = \Big[0, \frac{1}{B^{d-\Delta}}\Big[\cup \Big]1 - \frac{1}{B^{d-\Delta}}, 1\Big[.$$

b. Si $(a,q) \neq (1,1)$ et $\operatorname{pgcd}(a,q) = 1$, alors $\mathfrak{M}_\Delta(B,q,a)$ est un intervalle ouvert de $[0,1[$. Donc $\mathfrak{M}_\Delta(B)$ est une réunion finie d'intervalle de $[0,1[$. Mais si $0 < a_1 < b_1 < a_2 < \cdots < a_n < b_n < 1$, on a

$$[0,1[- \bigcup_{i=1}^{n}]a_i, b_i[= [0,a_1] \cup [b_n, 1] \cup \bigcup_{i=1}^{n-1} [b_i, a_{i+1}].$$

On en déduit que le complémentaire de $\mathfrak{M}_\Delta(B)$ est un réunion finie d'intervalles de $[0,1[$.

12.a. On a $\alpha \in \mathfrak{m}_\Delta(B)$. Il n'existe donc pas de couple $(a,q) \in \mathbf{N}^2$ avec $\operatorname{pgcd}(a,q) = 1$ et $1 \leqslant a \leqslant q \leqslant B^\Delta$ tel que $|\alpha - \frac{a}{q}| \leqslant \frac{1}{B^{d-\Delta}q}$. Si $|\alpha - \frac{a}{q}| \leqslant \frac{1}{B^{d-\Delta}q}$, on pose $a' = a/\operatorname{pgcd}(a,q)$ et $q' = q/\operatorname{pgcd}(a,q)$. On a $|\alpha - \frac{a'}{q'}| \leqslant \frac{1}{B^{d-\Delta}q'}$ et $q \geqslant q' > B^\Delta$.

b. D'après la question **10.b**, il existe un couple d'entiers (a,q) vérifiant $\operatorname{pgcd}(a,q) = 1$ et $1 \leqslant a \leqslant q \leqslant \lfloor B^{d-\Delta} \rfloor + 1$ tel que

$$\left|\alpha - \frac{a}{q}\right| \leqslant \frac{1}{q(\lfloor B^{d-\Delta}\rfloor + 1)} \leqslant \frac{1}{q^2}.$$

On applique alors la question **9** qui fournit une constante C ne dépendant que de d et de ϵ telle que

$$|S_B^1(\alpha)| \leqslant CB^{1+\epsilon}\left(\frac{1}{B} + \frac{1}{q} + \frac{q}{B^d}\right)^{1/2^{d-1}}.$$

Comme, par la question précédente, $B^\Delta \leqslant q \leqslant 1 + B^{d-\Delta}$, il existe une constante C' telle que

$$\begin{aligned} |S_B^1(\alpha)| &\leqslant CB^{1+\epsilon}\left(\frac{1}{B} + \frac{1}{B^\Delta} + \frac{B^{d-\Delta}+1}{B^d}\right)^{1/2^{d-1}} \\ &\leqslant C'B^{1-\frac{\Delta}{2^{d-1}}+\epsilon}. \end{aligned}$$

13. Comme $S_B^m(\alpha) = (S_B^1(\alpha))^m$, on applique la question précédente pour trouver C telle que

$$|S_B^m(\alpha)| \leqslant CB^{m-\frac{m\Delta}{2^{d-1}}+\epsilon}.$$

14.a. Si $(a,q) \in \mathbf{N}^2$ avec $1 \leqslant a \leqslant q$, on a l'égalité

$$\int_{\mathfrak{M}_\Delta(B,q,a)} 1\,\mathrm{d}\alpha = 2B^{\Delta-d}\frac{1}{q}.$$

Donc

$$\int_{\mathfrak{M}_\Delta(B)} 1\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{1\leqslant q\leqslant B^\Delta} 2B^{\Delta-d} \leqslant 2B^{2\Delta-d}.$$

b. Pour $\Delta = 1$, la question **13** fournit une majoration

$$\int_{\mathfrak{m}_1(B)} |S_B^m(\alpha)| \leqslant CB^{m-\frac{m}{2^{d-1}}+\epsilon}.$$

c. Comme $\mathfrak{M}_{\Delta_2}(B) - \mathfrak{M}_{\Delta_1}(B) \subset \mathfrak{m}_{\Delta_1}(B)$, on a

$$\begin{aligned}\int_{\mathfrak{M}_{\Delta_2}(B)-\mathfrak{M}_{\Delta_1}(B)} |S_B^m(\alpha)|\,\mathrm{d}\alpha &\leqslant 2B^{2\Delta_2-d}CB^{m-\frac{\Delta_1 m}{2^{d-1}}+\epsilon} \\ &\leqslant 2CB^{m-d-\left(\frac{m}{2^{d-1}}-2\right)\Delta_1+2(\Delta_2-\Delta_1)+\epsilon}.\end{aligned}$$

15. On se donne $\Delta = \Delta_0 < \Delta_1 < \cdots < \Delta_n = 1$, on a

$$\mathfrak{m}_\Delta(B) = \mathfrak{m}_1(B) \cup (\mathfrak{M}_{\Delta_n}(B) - \mathfrak{M}_{\Delta_{n-1}}(B)) \cup \cdots \cup (\mathfrak{M}_{\Delta_1}(B) - \mathfrak{M}_{\Delta_0}(B)).$$

Donc

$$\begin{aligned}\int_{\mathfrak{m}_\Delta(B)} |S_B^m(\alpha)|\,\mathrm{d}\alpha \leqslant C(B^{m-\frac{m}{2^{d-1}}+\epsilon} &+ B^{m-d-\Delta_n\left(\frac{m}{2^{d-1}}-2\right)+2(\Delta_n-\Delta_{n-1})+\epsilon} + \dots \\ &+ B^{m-d-\Delta_1\left(\frac{m}{2^{d-1}}-2\right)+2(\Delta_1-\Delta_0)+\epsilon}).\end{aligned}$$

Si $m > d2^{d-1}$, on a $\frac{m}{2^{d-1}} > d$ et $\frac{m}{2^{d-1}} - 2 > 0$, on peut prendre $\epsilon < \frac{m}{2^{d-1}} - d$ et $\epsilon < \Delta\left(\frac{m}{2^{d-1}} - 2\right)$ puis choisir les nombres Δ_i de sorte qu'on ait l'inégalité $\epsilon + 2(\Delta_{i+1} - \Delta_i) < \Delta\left(\frac{m}{2^{d-1}} - 2\right)$.

16. Dans ce cas, en utilisant la question **15** et les questions **2** et **3** de la partie IV, on obtient qu'il existe t_1 tel que pour tout entier $t \geqslant t_1$, on ait

$$N_d^m(t) = N_d^m(t, t^{1/d}) = \int_{[0,1[} S_{t^{1/d}}^m(\alpha)\mathbf{e}(-\alpha t)\,\mathrm{d}\alpha \geqslant c' t^{m/d-1}$$

pour un nombre réel $c' > 0$. Par conséquent $G(d) \leqslant m$.