

Exercice 1

1) Pour $n = 0$, on a $u_0 + v_0 = 2$ donc c'est vérifié.

Supposons le résultat vrai à l'ordre n et montrons-le à l'ordre $n + 1$.

$u_{n+1} + v_{n+1} = u_n + v_n = 2$ (par hypothèse de récurrence) donc la récurrence est faite.

a) $x_{n+1} = v_{n+1} - \frac{4}{5} = \frac{1}{3}u_n + \frac{1}{2}v_n - \frac{4}{5} = -\frac{2}{15} + \frac{1}{6}v_n = \frac{1}{6}x_n$ (car $u_n = 2 - v_n$)

Ainsi $(x_n)_n$ est géométrique de raison $\frac{1}{6}$.

b) On a alors $x_n = \left(\frac{1}{6}\right)^n x_0 = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^n$ donc $v_n = \frac{4}{5} + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^n$ et $u_n = \frac{6}{5} - \frac{1}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^n$.

c) u_n converge vers $\frac{6}{5}$ et v_n vers $\frac{4}{5}$.

3) B et C ne sont pas inversibles car B a 2 colonnes colinéaires et C aussi.

b) A vaut clairement $\begin{pmatrix} 2/3 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 \end{pmatrix}$.

c) Simples vérifications...

d) On trouve $B^2 = B$, $C^2 = C$, $BC = CB = 0$.

e) Pour $n = 0$ c'est trivialement vérifié.

Supposons le résultat vrai à l'ordre n et montrons-le à l'ordre $n + 1$.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} &= A \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = (B + \frac{1}{6}C)(B + \left(\frac{1}{6}\right)^n C) \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = (B^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^{n+1} C^2) \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \\ &= (B + \left(\frac{1}{6}\right)^{n+1} C) \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \text{ et la récurrence est faite.} \end{aligned}$$

f) En effectuant le produit matriciel dans 3) e) on retrouve les expressions de u_n et v_n .

g) Simple vérification...

Exercice 2

2.1.1) On a $f'(x) = e^{-x}(-x^2 + 1)$

2.1.2) Sur $[-1, +\infty[$, $f'(x)$ est du signe de $1 - x^2$ donc sur $[-1, 1]$ f croît et sur $[1, +\infty[$ f décroît.

2.1.3) En $+\infty$ f tend vers 0 car l'exponentielle l'emporte sur les fonctions puissances.

2.2.1) Pour $n = 0$ c'est évident.

Supposons le résultat vrai à l'ordre n et montrons-le à l'ordre $n + 1$.

Sur $\left[1, \frac{3}{2}\right]$ f décroît et elle est comprise entre $\frac{25}{4}e^{-3/2} > 1$ et $4e^{-1} < \frac{3}{2}$. Donc $u_{n+1} = f(u_n) \in [1, 3/2]$ car $u_n \in [1, 3/2]$. La récurrence est faite.

2.2.2) Comme $x \in [1, 3/2]$, on a $-5/4e^{-1} \leq f'(x) \leq 0$ donc $|f'(x)| \leq 1/2$.

2.2.3) a) $g'(x) = f'(x) - 1$, et sur $[1, 3/2]$, $|f'(x)| \leq 1/2$ donc $g'(x) = f'(x) - 1 \leq 0$ et ainsi g décroît sur $[1, 3/2]$.

2.2.3) b) Sur $[1, 3/2]$ g est continue, strictement décroissante et $g(1)g(3/2) < 0$ donc $\exists! \alpha \in]1, 3/2[$ tel que $g(\alpha) = 0$. On a donc $f(\alpha) = \alpha$.

2.2.3) c) Si $\alpha \leq u_n$ alors $f(\alpha) = \alpha \geq f(u_n) = u_{n+1}$ car f décroît sur $[1, 3/2]$ et $u_n, \alpha \in [1, 3/2]$.

¹email : hedi.joulak@gmail.com

De même pour l'autre implication.

4) Pour f continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, et $M = \underset{[a,b]}{\text{Max}}|f'|$, on a :

$$\forall x, y \in [a, b], |f(x) - f(y)| \leq M|x - y|.$$

Ici on l'applique sur $[1, 3/2]$ avec $x = u_n$ et $y = \alpha$ (x, y sont bien dans $[1, 3/2]$).

$$\text{On trouve donc } |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|.$$

Une récurrence immédiate nous donne $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$.

Et ainsi u_n tend vers α (car $\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ tend vers 0).

Exercice 3

3.1) On a $S_n(x) = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$ et donc $S(x) = \frac{1}{1 - x}$ car x^{n+1} tend vers 0.

3.2.1) L'événement « voir pour la première fois les 2 boules de l'urne » est la réunion des 2 événements « voir $n - 1$ fois le 1 et une fois le 2 » et de « voir $n - 1$ fois le 2 et une fois le 1 ».

$$\text{Ainsi la probabilité est : } P(X = n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \times \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \times \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

2) $P(Y = k) = P(X - 1 = k) = P(X = k + 1) = \left(\frac{1}{2}\right)^k$. C'est donc une loi géométrique de paramètre $p = \frac{1}{2}$.

$$\text{Ainsi } E(Y) = \frac{1}{p} = 2 \text{ et } V(Y) = \frac{1 - p}{p^2} = 2.$$

On en déduit $E(X) = E(Y + 1) = E(Y) + 1 = 3$ et $V(X) = V(Y + 1) = V(Y) = 2$.

3.3.1) $P(A_n) = \left(\frac{2}{3}\right)^n$ car on a que les boules B et C.

$$P(A_n \cap B_n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n \text{ car on a que les boules C.}$$

$$P(A_n \cap B_n \cap C_n) = 0.$$

3.3.2) $[X > n]$ signifie que l'on a pas vu toutes les boules sur les n -ers tirages. On aura donc soit que des boules A, soit que des boules B, soit que des boules C, soit que des boules A et B, soit que des boules A et C, soit que des boules B et C.

$$\text{Ainsi } [X > n] = A_n \cup B_n \cup C_n \cup (A_n \cap B_n) \cup (A_n \cap C_n) \cup (B_n \cap C_n) = A_n \cup B_n \cup C_n.$$

3.3.3) Avec la formule donnée, on a :

$$P(X > n) = P(A_n \cup B_n \cup C_n) = 3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n - 3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n + 0 = 3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}.$$

$$\begin{aligned} 3.3.4) P(X = n) &= P(X > n - 1) - P(X > n) = \left(3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}\right) - \left(3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right) \\ &= \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3.3.5) \sum_{n=3}^{+\infty} P(X = n) &= \sum_{n=3}^{+\infty} \left(\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right) = \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n - 2 \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n \\ &= \frac{4}{9} \times \frac{1}{1 - 2/3} - \frac{2}{9} \times \frac{1}{1 - 1/3} = 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
3.3.6) \quad E(X) &= \sum_{n=3}^{+\infty} nP(X = n) = \sum_{n=2}^{+\infty} n\left(\frac{2}{3}\right)^n - 2 \sum_{n=2}^{+\infty} n\left(\frac{1}{3}\right)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{2}{3}\right)^n - 1 - 2 \sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{1}{3}\right)^n + 2 \\
&= \frac{1}{(1 - 2/3)^2} + 1 - \frac{2}{(1 - 1/3)^2} = \frac{11}{2}.
\end{aligned}$$