Exercice n°1

Soit n un entier naturel non nul, on considère $E = \mathbf{R}_n[X]$ l'espace vectoriel sur $\mathbf{R}$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n.
Pour tout entier naturel j, on note $P^{(j)}$ la dérivée j-ième de P.
On définit la famille de polynômes $(P_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ par :

$$P_0(X) = 1 \quad \text{et} \quad \forall k \in \{1, \ldots, n\}, \quad P_k(X) = \frac{X(X-k)^{k-1}}{k!}.$$

1. (a) D'après la définition des polynômes P_k, on sait que $\forall k \in \{0, 1, \ldots, n\}, \quad deg(P_k) = k$, la famille de polynômes $(P_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est une famille de polynômes non nuls de E à degrés échelonnés alors cette famille est libre de E. De plus cette famille contient $n+1$ éléments et E est de dimension $n+1$, alors la famille $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ est un ebase de E.

   (b) Soit $k \in \{1, \ldots, n\}$, $P_k(X) = \dfrac{X(X-k)^{k-1}}{k!}$, alors $P_1'(X) = 1 = P_0(X)$ et

$$\forall k \in \{2, \ldots, n\}, \quad P_k'(X) = \frac{(X-k)^{k-1}}{k!} + (k-1)\frac{X(X-k)^{k-2}}{k!}$$

$$\forall k \in \{2, \ldots, n\}, \quad P_k'(X) = \frac{(X-k)^{k-2}}{k!}(X-k+(k-1)X) = \frac{k(X-1)(X-k)^{k-2}}{k!}$$

$$\forall k \in \{2, \ldots, n\}, \quad P_k'(X+1) = \frac{X(X-(k-1))^{k-2}}{(k-1)!} = P_{k-1}(X) \qquad (*)$$

   Soit k un entier compris entre 1 et n, on montre par récurrence sur j que

$$\forall j \in \{1, \ldots, k\}, \quad P_k^{(j)}(X) = P_{k-j}(X-j)$$

   La propriété est vérifiée pour $j = 1$ d'après le résultat $(*)$. Supposons vraie la propriété pour j fixé entre 1 et k-1, alors

$$P_k^{(j+1)}(X) = \left(P_k^{(j)}\right)'(X) = P_{k-j}'(X-j) = P_{k-j-1}(X-j-1) \quad \text{d'après la relation } (*)$$

   ce qui donne

$$P_k^{(j+1)}(X) = P_{k-(j+1)}(X-(j+1))$$

   Finalement la propriété est vraie pour tout $j \in \{1, \ldots, k\}$.

   (c) $(P_0, \ldots, P_n)$ est une base de E alors pour tout polynôme P de E il existe (un unique) $n+1$-uplet $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbf{R}^{n+1}$ tel que

$$P = a_0P_0 + a_1P_1 + \ldots + a_nP_n = \sum_{k=0}^{n} a_kP_k$$

   Puisque P_k est de degré k, si $j > k$ alors $P_k^{(j)} = 0$ et donc

$$\forall j \in \{0, 1, \ldots, n\}, \quad P^{(j)}(j) = \sum_{k=j}^{n} a_kP_k^{(j)}(j)$$

   Par la relation trouvée précédemment, on sait que pour $k \geqslant j$,
   $P_k^{(j)}(j) = P_{k-j}(j-j) = P_{k-j}(0)$, or pour $k-j > 0$, P_{k-j} admet 0 pour racine, donc on obtient :

$$P^{(j)}(j) = a_jP_j^{(j)}(j) = a_jP_0(0) = a_j$$

   On a ainsi la relation :

$$\forall P \in E, \quad P = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(k)P_k$$

2. On considère l'application u définie sur E par :

$$\forall P \in E, \quad u(P)(X) = P'(X+1).$$

(a) Si $P \in E$ alors P' est de degré au plus $n-1$ et donc $P'(X+1)$ aussi, d'où $u(P) \in E$. Par linéarité de la dérivation des polynômes, on a facilement :

$$\forall (a,b) \in \mathbf{R}^2 \quad \forall (P,Q) \in E^2, \quad u(aP+bQ) = au(P) + bu(Q)$$

u est donc un endomorphisme de E.

(b) D'après la relation $(*)$ obtenue en question 1b, on a immédiatement :

$$u(P_0) = 0, \quad \forall k \in \{1, \dots, n\}, \quad u(P_k) = P_{k-1}$$

La matrice A de u dans la base $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ est donc :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

(c) La matrice précédente, triangulaire supérieure, est clairement de rang n : la première colonne est nulle et les n dernières sont linéairement indépendantes. Les valeurs propres de la matrice triangulaire A sont les éléments de sa diagonale donc 0 est la seule valeur propre de A.

(d) A admet uniquement 0 pour valeur propre, donc si A était diagonalisable alors A serait la matrice nulle, ce qui est en contradiction avec le rang de A, donc A n'est pas diagonalisable.

3. On définit sur $E \times E$ l'application $\langle .|. \rangle$ par :

$$\forall (P,Q) \in E \times E, \quad \langle P|Q \rangle = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(k) Q^{(k)}(k)$$

(a) Par sa définition l'application $\langle .|. \rangle$ est une application de $E \times E$ vers $\mathbf{R}$. Soit $(P,Q,R) \in E \times E \times E$ et $(a,b) \in \mathbf{R}^2$, par commutativité du produit dans $\mathbf{R}$ et par linéarité de la dérivation dans E, on obtient facilement :

$$\langle P|Q \rangle = \langle Q|P \rangle$$

$$\langle aP + bR|Q \rangle = a\langle P|Q \rangle + b\langle R|Q \rangle$$

$\langle P|P \rangle = \sum_{k=0}^{n} \left(P^{(k)}(k)\right)^2 \geqslant 0$ comme somme de réels positifs. De plus si cette somme de réels positifs est nulle alors

$$\forall k \in \{0, 1, \dots, n\}, \quad P^{(k)}(k) = 0$$

mais on avait $P = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(k) P_k$ donc $P = 0$.
L'application $\langle .|. \rangle$ est donc une application bilinéaire de $E \times E$ dans $\mathbf{R}$, symétrique et définie-positive, c'est un produit scalaire sur E.

(b) La famille $(P_0, P_{1,l} dots, P_n)$ est une base de E.

Soit i et j deux entiers distincts éléments de $\{0, 1, \ldots, n\}$, on a par le résultat de la question 1c) :

$$P_j = \sum_{k=0}^{n} P_j^{(k)}(k) P_k, \quad P_i = \sum_{k=0}^{n} P_i^{(k)}(k) P_k$$

donc $P_j^{(k)}(k) = 1$ si $k = j$ et 0 sinon, de même $P_i^{(k)}(k) = 1$ si $k = i$ et 0 sinon, donc

$$\langle P_i | P_j \rangle = \sum_{k=0}^{n} P_j^{(k)}(k) P_i^{(k)}(k) = P_j^{(j)}(j) P_i^{(j)}(j) = P_i^{(j)}(j) = 0$$

$$\forall j \in \{0, 1, \ldots, n\}, \quad \langle P_j | P_j \rangle = \sum_{k=0}^{n} \left(P_j^{(k)}(k) \right)^2 = \left(P_j^{(j)}(j) \right)^2 = 1.$$

La famille $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ est donc une base orthonormale de E.

Exercice n°2

1. La fonction $\psi : t \in \mathbf{R}_+^* \mapsto t - \dfrac{1}{t} - \ln(t)$ est dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$ par somme de fonctions dérivables sur cet intervalle, et on a :

$$\forall t > 0, \quad \psi'(t) = 1 + \frac{1}{t^2} - \frac{1}{t} = \frac{t^2 - t + 1}{t^2}$$

Le polynôme du second degré $t^2 - t + 1$ a un discriminant strictement négatif, donc $\forall t > 0, \quad \psi'(t) > 0$. La fonction ψ est continue et strictement croissante sur $\mathbf{R}_+^*$, de plus

$$\forall t > 0, \quad \psi(t) = t - \frac{1}{t}(1 + t \ln t)$$

on en déduit que $\lim\limits_{t \to 0^+} \psi(t) = -\infty$.

$$\forall t > 0, \quad \psi(t) = t \left(1 - \frac{\ln t}{t} \right) - \frac{1}{t}$$

on en déduit que $\lim\limits_{t \to +\infty} \psi(t) = +\infty$.
$\psi(1) = 0$, la continuité, la monotonie de ψ et ses limites permettent d'obtenir le signe de ψ sur $\mathbf{R}_+^*$:
- ψ est strictement négative sur $]0, 1[$,
- ψ est strictement positive sur $]1, +\infty[$.

2. Pour $n \geqslant 1$, notons $u_n = \dfrac{n-1}{n!}$. La série de terme général u_n est à termes positifs et pour n tendant vers l'infini, $u_n \sim \dfrac{n}{n!} = \dfrac{1}{(n-1)!}$. On sait que la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{(n-1)!}$ converge (sa somme est $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = e$), alors par comparaison sur les séries à termes positifs, la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} u_n$ converge.

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{n=1}^{p} \frac{n-1}{n!} = \sum_{n=1}^{p} \frac{n}{n!} - \sum_{n=1}^{p} \frac{1}{n!} = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{1}{k!} - \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k!}$$

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{n=1}^{p} \frac{n-1}{n!} = 1 - \frac{1}{p!}$$

Par passage à la limite lorsque p tend vers l'infini, on obtient : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n-1}{n!} = 1$.

3. Soit $t \in \mathbf{R}_+^*$, on suppose que la série de terme général $\dfrac{\psi(t^{n-1})}{n!}$ converge. On a alors :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\psi(t^{n-1})}{n!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{tn!} - \frac{t}{n!t^n} - \frac{n-1}{n!}\ln(t)$$

On sait que $\forall x \in \mathbf{R}, \quad \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$ alors

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\psi(t^{n-1})}{n!} = \frac{1}{t}\left(e^t - 1\right) - t\left(e^{\frac{1}{t}} - 1\right) - \ln(t)$$

$$\forall t \in \mathbf{R}_+^*, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\psi(t^{n-1})}{n!} = \varphi(t) - \ln(t)$$

4. D'après l'étude de la fonction ψ, on sait que :
   - $\forall t \in]1, +\infty[, \quad t^{n-1} \in]1, +\infty[$ et donc $\psi(t^{n-1}) > 0$,
   - $\forall t \in]0, 1[, \quad t^{n-1} \in]0, 1[$ et $\psi(t^{n-1}) < 0$,

   alors la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\psi(t^{n-1})}{n!}$ est strictement positive pour tout $t \in]1, +\infty[$ et strictement négative pour tout $t \in]0, 1[$. On a donc bien :

$$\forall t \in]1, +\infty[, \quad \varphi(t) > \ln(t) \quad \text{et} \quad \forall t \in]0, 1[, \quad \varphi(t) < \ln(t).$$

5. Soit $(x, y) \in U =]0, +\infty[^2$. $\forall (x, y) \in U, \quad f(x, y) = x^y - y^x$. On sait que la fonction f est de classe C^2 sur U, alors f admet un point critique en $(x, y) \in U$ si et seulement le gradient de f en (x, y) est nul c'est-à-dire si et seulement si $((x, y) \in U$ et $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)$.

$$\forall (x, y) \in U, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{y}{x}x^y - \ln(y)y^x, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^y\ln(x) - \frac{x}{y}y^x$$

$$\begin{cases} (x, y) \in U \\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, y > 0 \\ yx^{y-1} - y^x\ln(y) = 0 \\ x^y\ln(x) - xy^{x-1} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x, y) \in U \\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, y > 0 \\ x^{y-1} = y^{x-1}\ln(y) \\ x^{y-1}\ln(x) = y^{x-1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x, y) \in U \\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, y > 0 \\ \ln(x)\ln(y) = 1 \\ x^{y-1}\ln(x) = y^{x-1} \end{cases}$$

Or $\forall (x,y) \in U, \quad x^{y-1} > 0$ et $y^{x-1} > 0$ alors $x^{y-1}\ln(x) = y^{x-1} \Rightarrow \ln(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1$, mais on a $\ln(x)\ln(y) = 1$ donc $\ln(x)$ et $\ln(y)$ sont de même signe, donc $x > 1$ et $y > 1$. On obtient finalement :

$$(x,y) \in U \text{ est un point critique de } f \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} (x,y) \in U \\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x > 1, y > 1 \\ \ln(x)\ln(y) = 1 \\ x^{y-1}\ln(x) = y^{x-1} \end{array} \right.$$

6. Soit $(x,y) \in U$ un point critique de f, on sait alors que $x > 1$, par bijection il existe $t > 0$ tel que $x = e^t$, on a alors

$$\ln(x)\ln(y) = 1 \Leftrightarrow t\ln(y) = 1 \Leftrightarrow y = e^{\frac{1}{t}}$$

et alors

$$x^{y-1}\ln(x) = y^{x-1} \Leftrightarrow t.\exp(t(y-1)) = \exp(\frac{e^t - 1}{t}) \Leftrightarrow \ln(t) + (y-1)t = \frac{e^t - 1}{t} \Leftrightarrow \ln(t) = \varphi(t)$$

On en déduit que si $(x,y) \in U$ est un point critique de f alors il existe $t \in \mathbf{R}_+^*$ tel que

$$x = e^t, \quad y = e^{\frac{1}{t}}, \quad \varphi(t) = \ln(t)$$

7. On a vu que pour $t \in]0,1[$ $\varphi(t) < \ln(t)$ et pour $t \in]1,+\infty[$ $\varphi(t) > \ln(t)$, on a aussi $\varphi(1) = 0 = \ln(1)$ alors l'unique réel $t > 0$ tel que $\varphi(t) = \ln(t)$ est le réel $t = 1$. On en déduit (résultat précédent) que l'unique point critique $(x,y) \in U$ de f est $(x,y) = (e^1, e^1) = (e,e)$.

8. Soit $(x,y) \in U$, on a clairement $f(x,y) = -f(y,x)$. Soit $t \in]-e,+\infty[$

$$f(e, e+t) = e^{e+t} - (e+t)^e = e^e \left(e^t - e^{e\ln(1+\frac{t}{e})}\right) = -f(e+t, e)$$

On sait que $\forall x > -1$, $\ln(1+x) < x$ (concavité de la fonction ln ou étude de fonction). On aura alors pour $t \in]-e,+\infty[$, $e^{e\ln(1+\frac{t}{e})} < e^t$ et donc $\left(e^t - e^{e\ln(1+\frac{t}{e})}\right) > 0$

$$\forall t > -e, \quad f(e,e+t) = e^e \left(e^t - e^{e\ln(1+\frac{t}{e})}\right) > 0$$

$$\forall t > -e, \quad f(e+t,e) = -f(e,e+t) < 0$$

Si f admet sur l'ouvert U un extremum en (x,y) alors (x,y) est un point critique de f. On en déduit que si f admet un extremum sur U alors il est obtenu en (e,e), mais $f(e,e+t) < 0$ et $f(e+t,e) > 0$ pour tout $t > -e$, donc f n'a pas d'extremum en (e,e).
Finalement f n'a pas d'extremum sur l'ouvert U.

Problème

Partie I. Etude des variables Y_n et Z_n.

On considère $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant la même loi exponentielle de paramètre 1. Pour tout entier naturel n non nul, on note Y_n et Z_n les deux variables aléatoires définies respectivement par :

$$Y_n = Max(X_1, \ldots, X_n), \quad Z_n = \frac{X_1}{1} + \frac{X_2}{2} + \ldots + \frac{X_n}{n}$$

On désigne par f_n la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$\left\{ \begin{array}{c} f_n(t) = 0 \text{ si } t < 0 \\ f_n(t) = ne^{-t}\left(1 - e^{-t}\right)^{n-1} \text{ si } t \geqslant 0 \end{array} \right.$$

1. On considère un tableau X de nombres réels de taille 2011 préalablement rempli.
   (a) algorithme pour la recherche de Max(X[1],X[2]) :
   if X[1]<X[2] then writeln('le maximum est ',X[2]) else writeln('le maximum est ',X[1])

   algorithme pour la recherche de Max(X[1],X[2],X[3]) :
   begin
   m := X[1] ;
   if m<X[2] then m :=X[2] ;
   if m<X[3] then writeln('le maximum est', X[3]) else writeln('le maximum est', m)
   end ;

   (b) Programme pour la recherche du maximum d'un tableau $X = array[1...2011] of real$ à remplir :

   program Recherchedemaximum ;
   type tab = array [1..2011] of real ;
   var X : tab ; i,k : integer ; m : real ;
   begin
   writeln(' donnez vos 2011 valeurs à comparer ') ;
   for i := 1 to 2011 do readln(X[i]) ;
   m := X[1] ;
   for k :=2 to 2011 do
   begin
   if m< X[k] then m := X[k]
   end ;
   writeln('le maximum du tableau est', m)
   end.

2. (a) Soit $t \in \mathbf{R}$, par définition

$$F_{Y_n}(t) = P(Y_n \leqslant t) = P(X_1 \leqslant t, X_2 \leqslant t, \ldots, X_n \leqslant t)$$

   Les variables $X_1, \ldots, X_n$ étant mutuellement indépendantes, on a :

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad F_{Y_n}(t) = P(X_1 \leqslant t, X_2 \leqslant t, \ldots, X_n \leqslant t) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i \leqslant t) = \prod_{i=1}^{n} F_{X_i}(t)$$

   (b) D'après le rappel de l'énoncé, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\forall t < 0, \quad F_{X_i}(t) = 0 \quad \text{et } \forall t \geqslant 0, \quad F_{X_i}(t) = 1 - e^{-t}$$

   on en déduit que :
   - $\forall t < 0, \quad F_{Y_n}(t) = 0,$
   - $\forall t \geqslant 0, \quad F_{Y_n}(t) = (1 - e^{-t})^n.$

   (c) On remarque que la fonction F_{Y_n} est de classe C^1 sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ avec

$$\forall t < 0, \quad F'_{Y_n}(t) = 0 = f_n(t) \quad \text{et} \quad \forall t > 0, \quad F'_{Y_n}(t) = ne^{-t}\left(1 - e^{-t}\right)^{n-1} = f_n(t)$$

   La fonction f_n, définie et positive sur $\mathbf{R}$, est égale à la dérivée de F_{Y_n} sur $\mathbf{R}_-^*$ et sur $\mathbf{R}_+^*$, c'est donc une densité de probabilité de la variable aléatoire de Y_n.

3. (a) Notons G_{n+1} la fonction de répartition de la variable aléatoire $\dfrac{X_{n+1}}{n+1}$. On a alors :

$$\forall t_i n\mathbf{R}, \quad G_{n+1}(t) = P(\frac{X_{n+1}}{n+1} \leqslant t) = P(X_{n+1} \leqslant (n+1)t) = F_{X_{n+1}}(nt + t)$$

   On aura donc : $\forall t < 0, \quad G_{n+1}(t) = 0$ et $\forall t \geqslant 0$, $G_{n+1}(t) = 1 - e^{-(n+1)t}$.

(b) La fonction de répartition G_{n+1} de la variable $\dfrac{X_{n+1}}{n+1}$ est clairement de classe C^1 sur $\mathbf{R}_-^*$ et sur $\mathbf{R}^+$. De plus $\lim\limits_{t\to 0^-} G_{n+1}(t) = 0 = G_{n+1}(0)$ alors G_{n+1} est continue sur $\mathbf{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbf{R}$ privé éventuellement de 0, donc la variable aléatoire $\dfrac{X_{n+1}}{n+1}$ est une variable aléatoire à densité. De plus

$$\forall t < 0, \quad G_{n+1}(t) = 0, \qquad \text{et} \qquad \forall t > 0, \quad G_{n+1}(t) = (n+1)e^{-(n+1)t}$$

alors la fonction d_{n+1} définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$\begin{cases} d_{n+1}(t) = 0 \text{ si } t < 0 \\ d_{n+1}(t) = (n+1)e^{-(n+1)t} \text{ si } t \geqslant 0 \end{cases}$$

est une densité de $\dfrac{X_{n+1}}{n+1}$.

4. La fonction $t \mapsto ne^{nt}\left(1-e^{-t}\right)^{n-1}$ est clairement définie et continue sur $\mathbf{R}$ alors la fonction $g : x \mapsto \displaystyle\int_0^x ne^{nt}\left(1-e^{-t}\right)^{n-1} \mathrm{d}t$ est définie et de classe C^12 sur ${}_r r$, avec

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad g'(x) = ne^{nx}\left(1-e^{-x}\right)^{n-1} = ne^{nx}e^{-(n-1)x}\left(e^x-1\right)^{n-1} = ne^x\left(e^x-1\right)^{n-1}$$

La fonction $h : x \mapsto \left(e^x-1\right)^n$ est clairement définie et de classe C^1 sur $\mathbf{R}$ avec $\forall x \in \mathbf{R}, \quad h'(x) = ne^x\left(e^x-1\right)^{n-1}$. On en déduit que

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad g'(x) = h'(x)$$

alors il existe $k \in \mathbf{R}$ tel que $\forall x \in \mathbf{R}, \quad g(x) = h(x)+k$, mais $g(0) = 0 = h(0)$ alors finalement $k = 0$ et

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad g(x) = h(x)$$

ce qui donne : $\forall x \in \mathbf{R}, \quad \displaystyle\int_0^x ne^{nt}\left(1-e^{-t}\right)^{n-1} \mathrm{d}t = \left(e^x-1\right)^n.$

5. Pour $n = 1$, $Z_n = Z_1 = X_1 = Y_1$ est une variable aléatoire dont une densité est f_1 d'après le résultat de la question 2c.
Supposons que pour n fixé dans $\mathbb{N}^*$, Z_n soit une variable aléatoire à densité dont une densité est f_n.
$Z_{n+1} = Z_n + \dfrac{X_{n+1}}{n+1}$ est somme de deux variables aléatoires à densité indépendantes, d_{n+1} (fonction bornée sur $\mathbf{R}$, minorée par 0 et majorée par n+1) est une densité de $\dfrac{X_{n+1}}{n+1}$ et f_n est une densité de Z_n alors $\forall x \in \mathbf{R}$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)d_{n+1}(x-t)\mathrm{d}t$ converge et on sait que $h : x \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} d_{n+1}(t)f_n(x-t)\mathrm{d}t$ est une densité de la variable aléatoire Z_{n+1}.
D'après la définition de f_n, on a :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad h(x) = \int_0^{+\infty} ne^{-t}\left(1-e^{-t}\right)^{n-1} d_{n+1}(x-t)\mathrm{d}t$$

et d'après la définition de d_{n+1}, si $x - t < 0$ alors $d_{n+1}(x-t) = 0$, il vient donc :

$$\forall x < 0, \quad h(x) = 0 = f_{n+1}(x)$$

$$\forall x \geqslant 0, \quad h(x) = \int_0^x ne^{-t}\left(1-e^{-t}\right)^{n-1}(n+1)e^{-(n+1)(x-t)}\mathrm{d}t$$

$$\forall x \in \mathbf{R}_+, \quad h(x) = (n+1)e^{-(n+1)x}\int_0^x ne^{nt}\left(1-e^{-t}\right)^{n-1}\mathrm{d}t$$

et d'après le résultat de la question 4, on a :

$$\forall x \geqslant 0, \quad h(x) = (n+1)e^{-(n+1)x}\left(e^x-1\right)^n = (n+1)e^{-x}\left(1-e^{-x}\right)^n = f_{n+1}(x)$$

Finalement $\forall x \in \mathbf{R}, \quad h(x) = f_{n+1}(x)$, donc Z_{n+1} est une variable aléatoire à densité dont f_{n+1} est une densité.
On a montré par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, Z_n est une variable aléatoire à densité dont une densité est f_n.

Partie II. Existence et unicité de la solution d'une équation différentielle

On désigne par E l'ensemble des fonctions f continue de $[0, +_infty[$ dans $\mathbf{R}$ telles que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}|f(t)|\,\mathrm{d}t$ converge. On admet que E est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel.

1. Soit φ et ψ deux fonctions appartenant à E, dérivables sur $\mathbf{R}_+$ et vérifiant l'équation $(D_f) \quad y - y' = f$ où $f \in E$. On introduit la fonction h définie sur $\mathbf{R}_+$ par :

$$\forall x \in \mathbf{R}_+, \quad h(x) = e^{-x}\left(\varphi(x) - \psi(x)\right)$$

   (a) La fonction h est dérivable sur $\mathbf{R}_+$ par somme et produit de fonctions dérivables sur $\mathbf{R}_+$ et on a :

$$\forall x \in \mathbf{R}_+, \quad h'(x) = -e^{-x}\left(\varphi(x)-\psi(x)\right)+e^{-x}\left(\varphi'(x)-\psi'(x)\right) = e^{-x}\left(\varphi(x)-\varphi'(x)+\psi'(x)-\psi(x)\right)$$

$$\forall x \in \mathbf{R}_+, \quad h(x) = e^{-x}\left(f(x)-f(x)\right) = 0$$

   on en déduit que la fonction h est constante sur $\mathbf{R}_+$.

   (b) On sait que la fonction $\varphi - \psi$ appartient à E alors $\displaystyle\int_0^{+\infty}|\varphi(t)-\psi(t)|\,\mathrm{d}t$ converge, or

$$\forall t \in \mathbf{R}_+, \quad 0 < e^{-t} \leqslant 1, \qquad \text{donc} \qquad \forall t \in \mathbf{R}_+n, \quad |h(t)| \leqslant |\varphi(t)-\psi(t)|$$

   et donc h appartient à E. La seule fonction constante sur $\mathbf{R}_+$ dont l'intégrale sur $[0, +\infty[$ converge est la fonction nulle, donc $\forall t \in \mathbf{R}_+, \quad h(t) = 0$, ce qui entraine

$$\forall t \in \mathbf{R}_+, \quad \varphi(t) = \psi(t)$$

   On a ainsi établi qu'il existe au plus une solution dans E à l'équation (D_f) lorsque $f \in E$.

2. Soit x un réel positif.

$$\forall t \in [x, +\infty[, \quad 0 < e^{-t} < e^{-x}$$

   alors

$$\forall t \in [x, +\infty[, \quad 0 \leqslant \left|e^{-t}f(t)\right| \leqslant e^{-x}\left|f(t)\right|$$

   l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}|f(t)|\,\mathrm{d}t$ converge alors pour tout réel x positif l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty}|f(t)|\,\mathrm{d}t$ converge aussi et par comparaison sur des fonctions continues et positives, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left|e^{-t}f(t)\right|\mathrm{d}t$ converge. On en déduit la convergence absolue, et donc la convergence, de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-t}f(t)\mathrm{d}t$.

3. Pour $f \in E$, on note $k_f : x \mapsto e^x \int_x^{+\infty} e^{-t} f(t) \mathrm{d}t$. D'après ce qui précède, la fonction k_f est définie sur $\mathbf{R}_+$. En notant F une primitive sur $\mathbf{R}_+$ de la fonction $x \mapsto e^{-x} f(x)$, on a : $\forall x \in \mathbf{R}_+, \quad k_f(x) = e^x \left(\lim_{a \to +\infty} F(a) - F(x) \right)$, alors k_f est dérivable sur $\mathbf{R}_+$ et on a :

$$\forall x \in \mathbf{R}_+, \quad k_f'(x) = e^x \int_x^{+\infty} e^{-t} f(t) \mathrm{d}t + e^x(-e^{-x} f(x)) = k_f - f(x)$$

La fonction k_f vérifie donc

$$\forall x \in \mathbf{R}_+, \quad k_f(x) - k_f'(x) = f(x)$$

4. On suppose dans cette question que f est à valeurs positives : $\forall x \in \mathbf{R}_+, \quad f(x) \geqslant 0$.
   (a) i. Par croissance de la fonction exp, on sait que $\forall x \in \mathbf{R}_+, \quad \forall t \in [x, +\infty[, \quad 0 < e^{-t} \leqslant e^{-x}$, la fonction f étant positive sur $\mathbf{R}_+$, on a :

$$\forall x \in \mathbf{R}_+, \quad \forall t \in [x, +\infty[, \quad 0 \leqslant e^{-t} f(t) \leqslant e^{-x} f(t)$$

   et par intégration sur $[x, +\infty($, puisqu'il y a convergence des intégrales :

$$\forall x \in \mathbf{R}_+, \quad 0 \leqslant k_f(x) \leqslant e^x \int_x^{+\infty} e^{-x} f(t) \mathrm{d}t$$

$$\forall x \in \mathbf{R}_+, \quad 0 \leqslant k_f(x) \leqslant \int_x^{+\infty} f(t) \mathrm{d}t$$

   ii. On sait que $\forall x \in \mathbf{R}_+, \quad k_f(x) = k_f'(x) + f(x)$ alors par intégration sur le segment $[0, A]$ avec $A \in \mathbf{R}_+$, on a :

$$\forall A \in \mathbf{R}_+, \quad \int_0^A k_f(t) \mathrm{d}t = \int_0^A k_f'(t) \mathrm{d}t + \int_0^A f(t) \mathrm{d}t$$

$$\forall A \in \mathbf{R}_+, \quad \int_0^A k_f(t) \mathrm{d}t = k_f(A) - k_f(0) + \int_0^A f(t) \mathrm{d}t$$

   (b) On déduit de l'encadremebnt $4ai)$ la limite de la fonction k_f en $+\infty$: $\lim_{A \to +\infty} k_f(A) = 0$, alors par passage à la limite dans l'égalité $4aii$ lorsque A tend vers $+\infty$, on, obtient la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} k_f(x) \mathrm{d}x$ avec

$$\int_0^{+\infty} k_f(x) \mathrm{d}x = -k_f(0) + \int_0^{+\infty} f(x) \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} (1 - e^{-x}) f(x) \mathrm{d}x$$

5. On revient au cas général avec $f : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$. On aura alors

$$\forall x \in \mathbf{R}_+, \quad |k_f(x)| \leqslant e^x \int_x^{+\infty} e^{-t} |f(t)| \mathrm{d}t \leqslant e^x \int_x^{+\infty} e^{-x} |f(t)| \mathrm{d}t$$

   et finalement $\forall x \in \mathbf{R}_+, \quad 0 \leqslant |k_f(x)| \leqslant k_{|f|}(x)$.
   La fonction $|f|$ est à valeurs positives et d'après le résultat de la question précédente, on sait que l'intégrale $\int_0^{+\infty} k_{|f|}(x) \mathrm{d}x$ converge ; par comparaison sur des fonctions positives, on obtient la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} |k_f(x)| \mathrm{d}x$ et donc k_f appartient à E.

6. Soit X une variable aléatoire possédant une densité f continue sur $\mathbf{R}_+$ et nulle sur $\mathbf{R}_-^*$ (et à valeurs positives puisque c'est une densité). Supposons qu'il existe une densité g dérivable sur $\mathbf{R}_+$, nulle sur $\mathbf{R}_-^*$ et vérifiant $g - g' = f$, d'après les résultats des questions 1 et 4 on sait que l'on doit avoir :
$$\forall x \in \mathbf{R}_-^*, \quad g(x) = 0 \text{ et } \forall x \in \mathbf{R}_+, \quad g(x) = k_f(x) = e^x \int_x^{+\infty} e^{-t} f(t)\mathrm{d}t$$
g étant une densité, on a aussi $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x = 1$, ce qui donne alors (résultat de la question 3) :
$$\int_0^{+\infty} k_f(x)\mathrm{d}x = 1 = \int_0^{+\infty} (1 - e^{-x}) f(x)\mathrm{d}x$$
f étant une densité de probabilité nulle sur $\mathbf{R}_-^*$, on a aussi $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1$ et donc
$$\int_0^{+\infty} k_f(x)\mathrm{d}x = 1 = 1 - \int_0^{+\infty} e^{-x} f(x)\mathrm{d}x$$
$$_int_0^{+\infty} e^{-x} f(x)\mathrm{d}x = 0$$
La fonction $x \mapsto e^{-x} f(x)$ étant positive sur $\mathbf{R}_+$, on doit avoir $\forall x \in \mathbf{R}^+, \quad e^{-x} f(x) = 0$ ce qui entraine f est nulle sur $\mathbf{R}_+$, ce qui est en contradiction avec $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1$.

Il n'existe donc pas de densité g nulle sur $\mathbf{R}_-^*$, dérivable sur $\mathbf{R}_+$ telle que $g - g' = f$ avec f densité nulle sur $\mathbf{R}_-^*$ et continue sur $\mathbf{R}^+$.

Partie III. Etude de l'application $f \mapsto k_f$

Soit φ définie sur E par :
$$\forall f \in E, \quad \varphi(f) = k_f$$

1. On sait d'après la partie précédente que si $f \in E$ alors $k_f \in E$, donc φ est une application de E dans E. De plus par linéaritré de l'intégrale sur $[x, +\infty[$ puisqu'il y a convergence si $(f, g) \in E^2$ et $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ alors
$$\forall x \in \mathbf{R}_+, \quad \varphi(af+bg)(x) = e^x \int_x^{+\infty} e^{-t} \left(af(t) + bg(t)\right) \mathrm{d}t = ae^x \int_x^{+\infty} e^{-t} f(t)\mathrm{d}t + be^x \int_x^{+\infty} e^{-t} g(t)\mathrm{d}t$$
$$\varphi(af + bg) = a\varphi(f) + b\varphi(g)$$
φ est donc un endomorphisme de E.

2. Soit a un réel strictement positif, on considère la fonction $f_a : x \in \mathbf{R}_+ \mapsto e^{-ax}$. La fonction f_a est continue sur $\mathbf{R}_+$ et positive, de plus
$$\forall y > 0, \quad \int_0^y f_a(x)\mathrm{d}x = \left[-\frac{e^{ax}}{a}\right]_0^y = \frac{1}{a} - \frac{e^{-ay}}{a}$$
donc $\displaystyle\lim_{y \to +\infty} \int_0^y f_a(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{a}$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_a(x)\mathrm{d}x$ est donc absolument convergente, la fonction f_a est bien dans E.
$$\forall x \in \mathbf{R}_+, \quad \varphi(f_a)(x) = e^x \int_x^{+infty} e^{-t} e^{-at}\mathrm{d}t = e^x \lim_{y \to +\infty} \int_x^y e^{-(a+1)t}\mathrm{d}t$$

$$\forall x \in \mathbf{R}_+, \quad \varphi(f_a)(x) = e^x \lim_{y \to +\infty} \left[-\frac{e^{-(a+1)t}}{a+1} \right]_x^y = \frac{e^{-ax}}{a+1}$$

On en déduit que $\varphi(f_a) = \dfrac{1}{a+1} f_a$, la fonction f_a est donc un vecteur propre de φ associé à la valeur propre $\dfrac{1}{a+1}$.

3.