
ECRICOME 2008

EXERCICE 1

Désolé mais je ne mettrai pas de flèches sur les vecteurs même sous la torture.

1. Soit v un élément de \mathbb{R}^3 . Il existe un unique élément (v_1, v_2) de $\mathcal{D} \times \mathcal{D}^\perp$ tel que $v = v_1 + v_2$.

Par définition $p(v) = v_1$ et $q(v) = v_2$ donc $(p + q)(v) = p(v) + q(v) = v_1 + v_2 = v$.

$$p + q = \text{Id}_{\mathbb{R}^3}.$$

2. (u) est une base orthonormée de \mathcal{D} . Le cours donne alors :

$$\forall v \in \mathbb{R}^3, p(v) = \langle v, u \rangle u.$$

Notons que $\langle i, u \rangle = a$, $\langle j, u \rangle = b$ et $\langle k, u \rangle = c$. Ainsi :

$$p(i) = au = a(ai + bj + ck), p(j) = bu = b(ai + bj + ck) \text{ et } p(k) = cu = c(ai + bj + ck).$$

$$\text{Alors : } P = M_{(i,j,k)}(p) = \begin{pmatrix} a^2 & ba & ca \\ ab & b^2 & cb \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix}.$$

$$q = \text{Id}_{\mathbb{R}^3} - p \text{ donc } Q = I_3 - P = \begin{pmatrix} 1 - a^2 & -ba & -ca \\ -ab & 1 - b^2 & -cb \\ -ac & -bc & 1 - c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b^2 + c^2 & -ba & -ca \\ -ab & a^2 + c^2 & -cb \\ -ac & -bc & a^2 + b^2 \end{pmatrix}.$$

$$P = \begin{pmatrix} a^2 & ba & ca \\ ab & b^2 & cb \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix} \text{ et } Q = \begin{pmatrix} 1 - a^2 & -ba & -ca \\ -ab & 1 - b^2 & -cb \\ -ac & -bc & 1 - c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b^2 + c^2 & -ba & -ca \\ -ab & a^2 + c^2 & -cb \\ -ac & -bc & a^2 + b^2 \end{pmatrix}.$$

$$3. \text{ a. } M^2 = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c^2 - b^2 & ba & ca \\ ab & -c^2 - a^2 & cb \\ ac & bc & -b^2 - a^2 \end{pmatrix} = -Q.$$

$$M^2 = -Q.$$

$$\text{b. } M \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \text{ Alors :}$$

$$f(u) = 0_{\mathbb{R}^3}.$$

u est un vecteur non nul de $\text{Ker } f$ donc $\dim \text{Ker } f \geq 1$.

Le théorème du rang donne alors $\text{rg } f = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \text{Ker } f \leq 3 - 1 = 2$.

$$\text{rg}(f) \leq 2.$$

$f \circ f = -q$ car $M^2 = -Q$. Ainsi $\text{Im } f^2 = \text{Im}(-q) = \text{Im } q = \mathcal{D}^\perp$. Alors $\mathcal{D}^\perp = \text{Im } f^2 \subset \text{Im } f$.

Ceci donne en particulier : $2 = \dim \mathcal{D}^\perp = \dim \text{Im } f^2 \leq \dim \text{Im } f = \text{rg } f$. Alors $\text{rg } f \geq 2$.

Finalement $\dim \text{Im } f = \text{rg } f = 2$.

Alors $\mathcal{D}^\perp \subset \text{Im } f$ et $\dim \mathcal{D}^\perp = \dim \text{Im } f = 2$ donc $\text{Im } f = \mathcal{D}^\perp$.

Dans ces conditions $\dim \text{Ker } f = \dim \mathbb{R}^3 - \text{rg } f = 3 - 2 = 1$. De plus u est un vecteur non nul de $\text{Ker } f$.

Alors $\text{Ker } f = \text{Vect}(u) = \mathcal{D}$.

$$\boxed{\text{Im } f = \mathcal{D}^\perp \text{ et } \text{Ker } f = \mathcal{D}.}$$

c. $\forall v \in \mathbb{R}^3$, $p(v) \in \mathcal{D}$ et $\mathcal{D} = \text{Ker } f$ donc $\forall v \in \mathbb{R}^3$, $f(p(v)) = 0_{\mathbb{R}^3}$.

$$\boxed{f \circ p = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}.$$

$f^2 = -q = p - \text{Id}_{\mathbb{R}^3}$ donc $f^3 = f \circ p - f = -f$. Ainsi $f + f^3 = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}$.

$$\boxed{X + X^3 \text{ est un polynôme annulateur de } f.}$$

d. L'ensemble des valeurs propres de f est contenu dans l'ensemble des zéros de $X + X^3$ dans \mathbb{R} donc 0 est la seule valeur propre possible de f .

Or $\text{Ker } f$ est de dimension 1 donc 0 est valeur propre de f et le sous-espace propre associé est de dimension 1. Ainsi f n'est pas diagonalisable.

$$\boxed{0 \text{ est la seule valeur propre de } f \text{ et } f \text{ n'est pas diagonalisable.}}$$

4. a Soient θ et θ' deux réels. $g_\theta \circ g_{\theta'} = (\text{Id}_{\mathbb{R}^3} + \sin \theta f + (1 - \cos \theta) f^2) \circ (\text{Id}_{\mathbb{R}^3} + \sin \theta' f + (1 - \cos \theta') f^2)$.

$$g_\theta \circ g_{\theta'} = \text{Id}_{\mathbb{R}^3} + (\sin \theta' + \sin \theta) f + ((1 - \cos \theta') + \sin \theta \sin \theta' + (1 - \cos \theta)) f^2 + (\sin \theta (1 - \cos \theta') \sin \theta + (1 - \cos \theta) \sin \theta') f^3 + (1 - \cos \theta)(1 - \cos \theta') f^4.$$

Notons que $f^3 = -f$ et $f^4 = -f^2$. Il vient alors :

$$g_\theta \circ g_{\theta'} = \text{Id}_{\mathbb{R}^3} + (\sin \theta' + \sin \theta - \sin \theta (1 - \cos \theta') - (1 - \cos \theta) \sin \theta') f + (1 - \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' + 1 - \cos \theta - (1 - \cos \theta)(1 - \cos \theta')) f^2 = \text{Id}_{\mathbb{R}^3} + (\sin \theta \cos \theta' + \cos \theta \sin \theta') f + (1 - (\cos \theta \cos \theta' - \sin \theta \sin \theta')) f^2.$$

$$g_\theta \circ g_{\theta'} = \text{Id}_{\mathbb{R}^3} + \sin(\theta + \theta') f + (1 - \cos(\theta + \theta')) f^2 = g_{\theta + \theta'}.$$

$$\boxed{\forall \theta \in \mathbb{R}, \forall \theta' \in \mathbb{R}, g_\theta \circ g_{\theta'} = g_{\theta + \theta'}.$$

b. Notons que $g_0 = \text{Id}_{\mathbb{R}^3}$. Alors $g_\theta \circ g_{(-\theta)} = g_{\theta + (-\theta)} = g_0 = \text{Id}_{\mathbb{R}^3}$. De même $g_{(-\theta)} \circ g_\theta = \text{Id}_{\mathbb{R}^3}$. Ainsi :

$$\boxed{g_\theta \text{ est inversible et } g_\theta^{-1} = g_{(-\theta)}.$$

EXERCICE 2

1. a. Soit x un réel positif. $f_n(x) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} = \frac{x}{n(n+x)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x}{n^2}$.

De plus la série de terme général $\frac{x}{n^2}$ converge et est à termes positifs.

Alors les règles de comparaison sur les séries à termes positifs montrent que la série de terme général $f_n(x)$ converge.

Pour tout réel positif x , la série de terme général $f_n(x)$ converge.

$$\text{b. } F(0) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 0. \quad F(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \lim_{r \rightarrow +\infty} \left(\sum_{n=1}^r \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \right) = \lim_{r \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{r+1} \right) = 1.$$

$$F(0) = 0 \text{ et } F(1) = 1.$$

2. Soit n un élément de \mathbb{N}^* . f_n est dérivable sur \mathbb{R}^+ et $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $f'_n(x) = \frac{1}{(n+x)^2}$.

Soit x un élément de \mathbb{R}^{+*} . $f'_n(x) = \frac{1}{(n+x)^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$.

De plus la série de terme général $\frac{1}{n^2}$ converge et est à termes positifs.

Alors les règles de comparaison sur les séries à termes positifs montrent que la série de terme général $f'_n(x)$ converge.

Pour tout réel positif x , la série de terme général $f'_n(x)$ converge.

3. a. φ est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}^{+*} , $\forall t \in \mathbb{R}^{+*}$, $\varphi'(t) = -\frac{1}{t^2}$ et $\varphi''(t) = \frac{2}{t^3}$.

Soit n un élément de \mathbb{N}^* . Soient x et x_0 deux éléments de $[n, +\infty[$.

L'inégalité de Taylor-Lagrange appliquée à φ à l'ordre 1 donne :

$$|\varphi(x) - \varphi(x_0) - (x - x_0) \varphi'(x_0)| \leq \frac{|x - x_0|^2}{2!} \underset{t \in [x_0, x] \text{ ou } [x, x_0]}{\text{Max}} |\varphi''(t)|.$$

Notons que $\forall t \in [n, +\infty[$, $|\varphi''(t)| = \frac{2}{t^3} \leq \frac{2}{n^3}$. Alors $\underset{t \in [x_0, x] \text{ ou } [x, x_0]}{\text{Max}} |\varphi''(t)| \leq \frac{2}{n^3}$.

Par conséquent : $|\varphi(x) - \varphi(x_0) - (x - x_0) \varphi'(x_0)| \leq \frac{(x - x_0)^2}{n^3}$.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (x, x_0) \in ([n, +\infty[)^2, |\varphi(x) - \varphi(x_0) - (x - x_0) \varphi'(x_0)| \leq \frac{(x - x_0)^2}{n^3}.$$

b. x et h sont deux réels tels que $x \in \mathbb{R}^+$, $h \neq 0$ et $x+h \in \mathbb{R}^+$.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, |f_n(x+h) - f_n(x) - h f'_n(x)| = \left| \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x+h} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n+x} - h \frac{1}{(n+x)^2} \right|.$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, |f_n(x+h) - f_n(x) - h f'_n(x)| = |-\varphi(n+x+h) + \varphi(n+x) + h \varphi'(n+x)| = |\varphi(n+x+h) - \varphi(n+x) - h \varphi'(n+x)|.$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, |f_n(x+h) - f_n(x) - h f'_n(x)| = |\varphi(n+x+h) - \varphi(n+x) - (n+x+h - (n+x)) \varphi'(n+x)|.$$

Or $n+x+h$ et $n+x$ sont deux éléments de $[n, +\infty[$. b. donne alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq |f_n(x+h) - f_n(x) - h f'_n(x)| \leq \frac{(n+x+h - n - x)^2}{n^3} = \frac{h^2}{n^3}.$$

La convergence de la série de terme général $\frac{h^2}{n^3}$ et les règles de comparaison des séries à termes positifs montrent alors la convergence de la série de terme général $|f_n(x+h) - f_n(x) - h f'_n(x)|$.

Si x et h sont deux réels tels que $x \in \mathbb{R}^+$, $h \neq 0$ et $x+h \in \mathbb{R}^+$ alors la série de terme général $|f_n(x+h) - f_n(x) - h f'_n(x)|$ est convergente.

c. x et h sont deux réels tels que $x \in \mathbb{R}^+$, $h \neq 0$ et $x+h \in \mathbb{R}^+$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|f_n(x+h) - f_n(x) - h f'_n(x)| \leq \frac{h^2}{n^3}$. De plus la série de terme général $f_n(x+h) - f_n(x) - h f'_n(x)$ est absolument convergente et la série de terme général $\frac{h^2}{n^3}$ converge. Alors :

$$\left| \sum_{n=1}^{+\infty} (f_n(x+h) - f_n(x) - h f'_n(x)) \right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} |f_n(x+h) - f_n(x) - h f'_n(x)| \leq h^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}.$$

Les séries de termes généraux $f_n(x+h)$, $f_n(x)$ et $f'_n(x)$ étant convergentes on a encore :

$$\left| \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x+h) - \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) - h \sum_{n=1}^{+\infty} f'_n(x) \right| \leq h^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3} \text{ ou } |F(x+h) - F(x) - h G(x)| \leq h^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}.$$

En divisant par $|h|$ on obtient : $\left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - G(x) \right| \leq |h| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$.

Si x et h sont deux réels tels que $x \in \mathbb{R}^+$, $h \neq 0$ et $x+h \in \mathbb{R}^+$ alors : $\left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - G(x) \right| \leq K|h|$ où $K = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$.

d. Soit x un élément de \mathbb{R}^+ . $\forall h \in]-x, 0[\cup]0, +\infty[$, $0 \leq \left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - G(x) \right| \leq K|h|$ et $\lim_{h \rightarrow 0} (K|h|) = 0$.

Alors, par encadrement on obtient : $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = G(x)$. Ainsi F est dérivable en x et $F'(x) = G(x)$.

F est dérivable sur \mathbb{R}^+ et $F' = G$.

4. a. Soit x un élément de \mathbb{R}^+ et soit k un élément de \mathbb{N}^* . Posons : $\forall t \in]0, +\infty[$, $\varphi_x(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}$.

$\forall t \in]0, +\infty[$, $\varphi_x(t) = \frac{x}{t(t+x)}$. φ_x est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $\forall t \in]0, +\infty[$, $\varphi'_x(t) = -\frac{x(2t+x)}{(t(t+x))^2}$.

$\forall t \in]0, +\infty[$, $\varphi'_x(t) \leq 0$. φ_x est donc décroissante sur $]0, +\infty[$.

Ainsi $\forall t \in [k, k+1]$, $f_{k+1}(x) = \varphi_x(k+1) \leq \varphi_x(t) \leq \varphi_x(k) = f_k(x)$.

En intégrant il vient : $f_{k+1}(x) = \int_k^{k+1} f_{k+1}(x) dt \leq \int_k^{k+1} \varphi_x(t) dt \leq \int_k^{k+1} f_k(x) dt = f_k(x)$.

$\forall k \in \mathbb{N}^*$, $f_{k+1}(x) \leq \int_k^{k+1} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x} \right) dt \leq f_k(x)$.

b. Soit x un élément de \mathbb{R}^+ . Soit n un élément de $\llbracket 2, +\infty \llbracket$.

a. donne : $\int_1^{n+1} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x} \right) dt = \sum_{k=1}^n \left(\int_k^{k+1} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x} \right) dt \right) \leq \sum_{k=1}^n f_k(x)$.

a. donne encore : $\int_1^n \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x} \right) dt = \sum_{k=1}^{n-1} \left(\int_k^{k+1} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x} \right) dt \right) \geq \sum_{k=1}^{n-1} f_{k+1}(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x) - f_1(x)$.

Ainsi : $\int_1^{n+1} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x} \right) dt \leq \sum_{k=1}^n f_k(x) \leq f_1(x) + \int_1^n \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x} \right) dt$. Or $f_1(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{x+1}$. Donc

$\forall x \in \mathbb{R}^+$, $\forall n \in \llbracket 2, +\infty \llbracket$, $\int_1^{n+1} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x} \right) dt \leq \sum_{k=1}^n f_k(x) \leq \frac{x}{x+1} + \int_1^n \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x} \right) dt$.

c. Soit x un élément de \mathbb{R}^+ .

$$\forall n \in \llbracket 2, +\infty \llbracket, \int_1^n \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x} \right) dt = \left[\ln |t| - \ln |t+x| \right]_1^n = \ln \left(\frac{n}{n+x} \right) - \ln \left(\frac{1}{1+x} \right).$$

Notons également que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{n}{n+x} \right) = 0$. Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_1^n \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x} \right) dt \right) = -\ln \left(\frac{1}{1+x} \right) = \ln(1+x)$.

On a encore $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_1^{n+1} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x} \right) dt \right) = \ln(1+x)$.

En faisant tendre n vers $+\infty$ dans l'encadrement de b. il vient : $\ln(1+x) \leq F(x) \leq \frac{x}{x+1} + \ln(1+x)$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^+, \ln(1+x) \leq F(x) \leq \frac{x}{x+1} + \ln(1+x).}$$

d. $\forall x \in]1, +\infty[$, $\ln x > 0$ donc $\forall x \in]1, +\infty[$, $\frac{\ln(x+1)}{\ln x} \leq \frac{F(x)}{\ln x} \leq \frac{x}{x+1} \frac{1}{\ln x} + \frac{\ln(x+1)}{\ln x}$.

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln x + \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)}{\ln x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{\ln x} \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right) = 1$.

De plus : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{x+1} \frac{1}{\ln x} \right) = 1 \times 0 = 0$. On obtient alors par encadrement $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{\ln x} = 1$. Finalement :

$$\boxed{F(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \ln x.}$$

PROBLÈME

3. 1. Méthode de Monte-carlo.

1. a. La fonction f_U définie par $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_U(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ est une densité de U .

b. Utilisons le théorème de transfert.

- U prend ses valeurs dans l'intervalle $I = [0, 1]$... d'extrémités 0 et 1 ;
- g est définie et continue sur I .

Alors $g(U)$ possède une espérance si et seulement si $\int_0^1 g(t) f_U(t) dt$ est absolument convergente.

En cas d'existence : $E(g(U)) = \int_0^1 g(t) f_U(t) dt$ donc $E(g(U)) = \int_0^1 g(t) dt = J$.

$\forall t \in [0, 1]$, $|g(t) f_U(t)| = |g(t)|$ et $|g|$ est continue sur $[0, 1]$. Alors $\int_0^1 |g(t) f_U(t)| dt$ converge.

Ainsi $E(g(U))$ existe et vaut $\int_0^1 g(t) f_U(t) dt$ c'est à dire J .

La variable aléatoire $g(U)$ admet une espérance égale à J .

2. Dans la suite **nous supposons** que σ est positif donc strictement positif...

Tous les variables aléatoires de la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ayant même loi, **nous admettrons** qu'il en est de même pour les variables aléatoires de la suite $(g(U_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$

a. Utilisons la loi faible des grands nombres.

- $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes donc $(g(U_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes ;
- Toutes les variables aléatoires de la suite $(g(U_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ ont même loi, possèdent une espérance égale à J et une même variance.

Alors la suite de variables aléatoires $\left(\frac{g(U_1) + g(U_2) + \dots + g(U_n)}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers J .

La suite de variables aléatoires $\left(\frac{S_n}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers J .

b. i. Utilisons le théorème de la limite centrée.

- $(g(U_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes.
- Toutes les variables aléatoires de la suite $(g(U_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ ont même loi, possèdent une espérance égale à J et une variance non nulle égale à σ^2 .

Dans ces conditions, la suite de variables aléatoires $\left(\frac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{V(S_n)}}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire de loi normale centrée réduite.

Il en est alors clairement de même pour la suite $\left(\frac{\frac{S_n}{n} - E\left(\frac{S_n}{n}\right)}{\sqrt{V\left(\frac{S_n}{n}\right)}}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Notons que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $E\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n} E\left(\sum_{i=1}^n g(U_i)\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(g(U_i)) = \frac{1}{n} n J = J$.

Les variables aléatoires de la suite $(g(U_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ étant indépendantes on a encore :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, V\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2} V\left(\sum_{i=1}^n g(U_i)\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n V(g(U_i)) = \frac{1}{n^2} n \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{\frac{S_n}{n} - E\left(\frac{S_n}{n}\right)}{\sqrt{V\left(\frac{S_n}{n}\right)}} = \frac{\frac{S_n}{n} - J}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$. Finalement :

La suite de variables aléatoires $\left(\frac{\frac{S_n}{n} - J}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire de loi normale centrée réduite.

ii. Supposons n assez grand. Alors $\frac{\frac{S_n}{n} - J}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ suit la loi normale centrée réduite... Donc :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}, P\left(\left|\frac{\frac{S_n}{n} - J}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right| \leq \varepsilon\right) = P\left(-\varepsilon \leq \frac{\frac{S_n}{n} - J}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq \varepsilon\right) = \Phi(\varepsilon) - \Phi(-\varepsilon) = \Phi(\varepsilon) - (1 - \Phi(\varepsilon)) = 2\Phi(\varepsilon) - 1.$$

En particulier : $P\left(\left|\frac{\frac{S_n}{n} - J}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right| \leq 1,96\right) = 2\Phi(1,96) - 1 = 2 \times 0,975 - 1 = 0,95$. Notons alors que :

$$P\left(\left|\frac{\frac{S_n}{n} - J}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right| \leq 1,96\right) = P\left(-1,96 \leq \frac{\frac{S_n}{n} - J}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq 1,96\right) = P\left(\frac{S_n}{n} - 1,96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq J \leq \frac{S_n}{n} + 1,96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right).$$

Ainsi $P\left(\frac{S_n}{n} - 1,96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq J \leq \frac{S_n}{n} + 1,96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 0,95$.

$\left[\frac{S_n}{n} - 1,96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \frac{S_n}{n} + 1,96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$ est un intervalle de confiance pour J au niveau de confiance 95 %.

3. a \sin définit une bijection de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ sur $[0, 1]$, de classe \mathcal{C}^1 et (strictement) croissante.

Ceci justifie largement le changement de variable $t = \sin u$ dans l'intégrale $\int_0^1 4\sqrt{1-t^2} dt$.

$$\int_0^1 4\sqrt{1-t^2} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\sqrt{1-\sin^2 u} \cos u du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\cos^2 u du = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos(2u)) dt = 2 \left[u + \frac{\sin(2u)}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}}.$$

$$\int_0^1 4\sqrt{1-t^2} dt = 2 \times \frac{\pi}{2} = \pi.$$

$$\int_0^1 4\sqrt{1-t^2} dt = \pi.$$

b. i. Rien à signaler.

```
1 fonction G(t:real):real;
2 begin
3   G:=4*sqrt(1-t*t);
4 end;
```

ii. Notons qu'ici la suite de variables aléatoires $\left(\frac{S_n}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers $J = \pi$.

Notons aussi que l'on nous demande simplement de simuler la variable aléatoire $\frac{S_n}{n}$.

```
1 begin
2   randomize;
3   write('Donnez la valeur de n. n=');readln(n);
4   J:=0;
5   for i:= 1 to n do J:=J+G(random);
6   J:=J/n;
7   writeln('Une valeur approchée de pi est : ',J);
8 end.
```

3. 2. Réduction de la variance par variables antithétiques.

1. Posons $T = 1 - U$. T est une variable aléatoire qui prend ses valeurs dans $[0, 1]$.

Notons F_T sa fonction de répartition et F_U celle de U .

$\forall x \in]-\infty, 0]$, $F_T(x) = 0$ et $\forall x \in [1, +\infty[$, $F_T(x) = 1$. Soit x un élément de $[0, 1[$. Notons que $1 - x \in [0, 1]$. Ainsi :

$$F_T(x) = P(1 - U \leq x) = P(1 - x \leq U) = 1 - P(U < 1 - x) = 1 - P(U \leq 1 - x) = 1 - F_U(1 - x) = 1 - (1 - x) = x.$$

Finalement $\forall x \in]-\infty, 0]$, $F_T(x) = 0$, $\forall x \in [0, 1[$, $F_T(x) = x$ et $\forall x \in [1, +\infty[$, $F_T(x) = 1$.

Donc T suit la loi uniforme sur $[0, 1]$.

$1 - U$ suit la loi uniforme sur $[0, 1]$.

Dans ces conditions U et $1 - U$ ont même loi. Il en est alors de même pour $g(U)$ et $g(1 - U)$.

Par conséquent $g(1 - U)$ possède une espérance qui vaut J .

Alors $Y = \frac{1}{2} [g(U) + g(1 - U)]$ possède une espérance qui vaut $\frac{1}{2} [E[g(1 - U)] + E[g(U)]]$ donc J .

$$\boxed{E(Y) = J.}$$

2. a. Soit u et w deux éléments de $[0, 1]$. g est (strictement) croissante sur $[0, 1]$ donc $g(u) - g(w)$ est du signe de $u - w$ et $g(1 - u) - g(1 - w)$ est du signe de $(1 - u) - (1 - w)$ donc du signe de $-(u - w)$.

Alors $g(u) - g(w)$ et $g(1 - u) - g(1 - w)$ sont de signes opposés. Donc $(g(u) - g(w))(g(1 - u) - g(1 - w)) \leq 0$.

$$\boxed{\forall (u, w) \in [0, 1]^2, (g(u) - g(w))(g(1 - u) - g(1 - w)) \leq 0.}$$

► *Remarque* Ceci vaut encore si g est (strictement) décroissante.

b. Version light U et W prennent leurs valeurs dans $[0, 1]$.

Donc d'après ce qui précède $\forall \omega \in \Omega$, $(g(U(\omega)) - g(W(\omega)))(g(1 - U(\omega)) - g(1 - W(\omega))) \leq 0$.

Ceci donne : $(g(U) - g(W))(g(1 - U) - g(1 - W)) \leq 0$.

La croissance de l'espérance donne alors $E[(g(U) - g(W))(g(1 - U) - g(1 - W))] \leq 0$.

Seconde version U et W prennent presque sûrement leurs valeurs dans $[0, 1]$.

Notons S l'événement $\{U \in [0, 1]\} \cap \{W \in [0, 1]\}$ et S' l'événement $\{(g(U) - g(W))(g(1 - U) - g(1 - W)) \leq 0\}$.

D'après ce qui précède $\forall \omega \in S$, $(g(U(\omega)) - g(W(\omega)))(g(1 - U(\omega)) - g(1 - W(\omega))) \leq 0$.

Ainsi $S \subset S'$ donc $P(S) \leq P(S')$.

Par indépendance : $P(S) = P(\{U \in [0, 1]\} \cap \{W \in [0, 1]\}) = P(U \in [0, 1])P(W \in [0, 1]) = 1 \times 1 = 1$.

Par conséquent $1 = P(S) \leq P(S') \leq 1$, donc $P(S') = 1$.

Alors presque sûrement $(g(U) - g(W))(g(1 - U) - g(1 - W))$ prend des valeurs négatives ou nulles.

Grace au cours on retrouve ainsi :

$$\boxed{E[(g(U) - g(W))(g(1 - U) - g(1 - W))] \leq 0.}$$

Dans ces conditions, par linéarité de l'espérance et grace à l'espérance (!!) de l'existence de toutes les espérances (... voir plus bas) on a :

$$E(g(U)g(1 - U)) - E(g(U)g(1 - W)) - E(g(W)g(1 - U)) + E(g(W)g(1 - W)) \leq 0.$$

U et W sont indépendantes donc U et $1 - W$ le sont également. Alors $g(U)$ et $g(1 - W)$ sont indépendantes.

De plus U et $1 - W$ ont même loi donc $g(U)$ et $g(1 - W)$ aussi. Alors $E(g(1 - W))$ existe et vaut $E(g(U))$.

Ce qui précède donne alors : $E(g(U)g(1 - W)) = E(g(U))E(g(1 - W)) = (E(g(U)))^2$.

On montre de même que : $E(g(W)g(1 - U)) = (E(g(U)))^2$.

U et W ayant même loi il en est de même de $g(U)g(1 - U)$ et de $g(W)g(1 - W)$.

Alors $E(g(U)g(1 - U)) = E(g(W)g(1 - W))$.

Dans ces conditions l'inégalité $E(g(U)g(1 - U)) - E(g(U)g(1 - W)) - E(g(W)g(1 - U)) + E(g(W)g(1 - W)) \leq 0$ devient : $2E(g(U)g(1 - U)) - 2(E(g(U)))^2 \leq 0$. Finalement :

$$\boxed{E[g(U)g(1 - U)] \leq (E[g(U)])^2.}$$

► *Remarque* Un peu d'existence...

Posons $\forall x \in [0, 1], \check{g}(x) = g(x)g(1-x)$. \check{g} est continue sur $[0, 1]$. On montre alors comme dans 3.1.1 que $E(\check{g}(U))$ existe.

Ainsi $E(g(U)g(1-U))$ existe. Alors $E(g(W)g(1-W))$ existe également car $\check{g}(U)$ et $\check{g}(W)$ ont même loi puisque U et W ont même loi.

$g(U)$ et $g(1-W)$ ont même loi sont indépendantes et possèdent la même espérance. Ceci suffit pour dire que $E(g(U)g(1-W))$ existe (et vaut $(E(g(U)))^2$). De même $E(g(W)g(1-U))$ existe (et vaut $(E(g(U)))^2$).

Ceci donne alors l'existence de $E[(g(U) - g(W))(g(1-U) - g(1-W))]$ et permet de dire que cette espérance vaut : $E(g(U)g(1-U)) - E(g(U)g(1-W)) - E(g(W)g(1-U)) + E(g(W)g(1-W))$, non ?

c. $Y - E(Y) = \frac{1}{2} [(g(U) - J) + (g(1-U) - J)]$. Alors :

$$(Y - E(Y))^2 = \frac{1}{4} [(g(U) - J)^2 + (g(1-U) - J)^2 + 2(g(U) - J)(g(1-U) - J)].$$

$$(Y - E(Y))^2 = \frac{1}{4} [(g(U) - E(g(U)))^2 + (g(1-U) - E(g(1-U)))^2 + 2g(U)g(1-U) - 2Jg(U) - 2Jg(1-U) + 2J^2].$$

$(g(U) - E(g(U)))^2$ et $(g(1-U) - E(g(1-U)))^2$ possèdent une espérance qui vaut σ^2 .

$g(U)$ et $g(1-U)$ possèdent une espérance qui vaut J .

Notons pour finir que $g(U)g(1-U)$ possède également une espérance.

Alors $(Y - E(Y))^2$ possède une espérance qui vaut $\frac{1}{4} [\sigma^2 + \sigma^2 + 2E(g(U)g(1-U)) - 2J^2 - 2J^2 + 2J^2]$.

Donc Y possède une variance qui vaut $\frac{1}{2} [\sigma^2 + E(g(U)g(1-U)) - J^2]$.

Alors d'après b, $V(Y) \leq \frac{1}{2} [\sigma^2 + (E(g(U)))^2 - J^2] = \frac{1}{2} \sigma^2 = \frac{1}{2} V(g(U))$. Finalement :

$$Y \text{ possède une variance et } V(Y) \leq \frac{1}{2} V(g(U)).$$

3. Reprenons la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$. Posons $\forall n \in \mathbb{N}, T_n = \frac{1}{2} (g(U_n) + g(1-U_n))$.

Considérons la fonction $\hat{g}: x \rightarrow \frac{1}{2} (g(x) + g(1-x))$. $\forall n \in \mathbb{N}^*, T_n = \hat{g}(U_n)$.

► *Remarque* A partir d'ici nous pourrions passer directement à la conclusion. En effet \hat{g} étant définie et continue sur $[0, 1]$ nous pouvons utiliser 3.1.2.b.ii. en remplaçant g par \hat{g} . L'intervalle de confiance est alors celui de 3.1.2.b.ii. en remplaçant σ par σ' .

Pour les incrédules, ramons ! Posons $\forall n \in \mathbb{N}^*, S'_n = \sum_{i=1}^n T_i$.

Pour tout n dans \mathbb{N}^* , T_n a même loi que Y . En particulier pour tout n dans \mathbb{N}^* , T_n possède une espérance qui vaut J et une variance qui vaut $V(Y)$.

Dans la suite nous poserons $\sigma' = \sqrt{V(Y)}$ et **nous supposerons** σ' non nul (ce n'est pas le cas lorsque $\forall x \in [0, 1], g(x) = x \dots$).

• $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes donc $(\hat{g}(U_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes.

• Toutes les variables aléatoires de la suite $(\hat{g}(U_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ ont même loi, possèdent une espérance égale à J et une variance égale à σ'^2 .

Dans ces conditions, la suite de variables aléatoires $\left(\frac{\frac{S'_n}{n} - E\left(\frac{S'_n}{n}\right)}{\sqrt{V\left(\frac{S'_n}{n}\right)}} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire de loi normale centrée réduite.

Un calcul simple donne $E\left(\frac{S'_n}{n}\right) = J$ et $\sqrt{V\left(\frac{S'_n}{n}\right)} = \frac{\sigma'}{\sqrt{n}}$.

Alors la suite de variables aléatoires $\left(\frac{\frac{S'_n}{n} - J}{\frac{\sigma'}{\sqrt{n}}} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire de loi normale centrée réduite.

Ici encore nous supposons que pour n assez grand $\frac{S'_n - J}{\frac{\sigma'}{\sqrt{n}}}$ suit la loi normale centrée réduite.

On montre alors comme dans 3.1.2 que $P\left(\left|\frac{S'_n - J}{\frac{\sigma'}{\sqrt{n}}}\right| \leq 1,96\right) = 2\Phi(1,96) - 1 = 0,95$ et que

$$P\left(\left|\frac{S'_n - J}{\frac{\sigma'}{\sqrt{n}}}\right| \leq 1,96\right) = P\left(\frac{S'_n}{n} - 1,96 \frac{\sigma'}{\sqrt{n}} \leq J \leq \frac{S'_n}{n} + 1,96 \frac{\sigma'}{\sqrt{n}}\right) \text{ tout ceci pour } n \text{ assez grand.}$$

Ainsi $P\left(\frac{S'_n}{n} - 1,96 \frac{\sigma'}{\sqrt{n}} \leq J \leq \frac{S'_n}{n} + 1,96 \frac{\sigma'}{\sqrt{n}}\right) = 0,95$ pour n assez grand.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S'_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2}(g(U_i) + g(1 - U_i))$ et $\sigma' = \sqrt{V(Y)}$. Pour n assez grand $\left[\frac{S'_n}{n} - 1,96 \frac{\sigma'}{\sqrt{n}}, \frac{S'_n}{n} + 1,96 \frac{\sigma'}{\sqrt{n}}\right]$ est un intervalle de confiance pour J au niveau de confiance 95 %.

$l_n = 2 \times 1,96 \frac{\sigma'}{\sqrt{n}}$ et le nouvel intervalle de confiance a pour longueur $l'_n = 2 \times 1,96 \frac{\sigma'}{\sqrt{n}}$.

Pour avoir $l'_N = l_n$ il faut et il suffit que $N = n \frac{\sigma'^2}{\sigma^2}$! Oublions un peu la question (il semble difficile de trouver un N solution surtout lorsque l'on ne connaît ni σ ni σ' et que l'on veut N entier).

Contentons nous de dire que $l'_N \leq l_n$ si et seulement si $N \geq n \frac{\sigma'^2}{\sigma^2}$. Remarquons alors que $\frac{\sigma'^2}{\sigma^2} = \frac{V(Y)}{V(g(U))} \leq \frac{1}{2}$.

Donc dès que $N \geq \frac{n}{2}$, on a $N \geq n \frac{\sigma'^2}{\sigma^2}$ et $l'_N \leq l_n$.

Avec cette nouvelle méthode, il suffit donc de faire $\text{Ent}\left(\frac{n}{2}\right) + 1$ tirages de la variable aléatoire uniforme pour obtenir un intervalle de confiance de longueur au plus l_n .

3. 3. Réduction de la variance par stratification.

3. 3. 1. Etude d'une fonction de plusieurs variables.

1. f est une fonction rationnelle (ou la restriction à $(]0, +\infty[)^3$ d'une fonction rationnelle...) donc :

$$f \text{ est de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur } (]0, +\infty[)^3.$$

Sans difficulté on obtient :

$$\forall (x_1, x_2, x_3) \in (]0, +\infty[)^3, \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2, x_3) = -\frac{1}{4x_1^2}, \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2, x_3) = -\frac{1}{x_2^2} \text{ et } \frac{\partial f}{\partial x_3}(x_1, x_2, x_3) = -\frac{1}{9x_3^2}.$$

$$\forall (x_1, x_2, x_3) \in (]0, +\infty[)^3, \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2x_1^3}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_1, x_2, x_3) = \frac{2}{x_2^3} \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2}(x_1, x_2, x_3) = \frac{2}{9x_3^3}.$$

$$\forall (x_1, x_2, x_3) \in (]0, +\infty[)^3, \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x_1, x_2, x_3) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2}(x_1, x_2, x_3) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3}(x_1, x_2, x_3) = 0.$$

$$\forall (x_1, x_2, x_3) \in (]0, +\infty[)^3, \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1, x_2, x_3) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3}(x_1, x_2, x_3) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1}(x_1, x_2, x_3) = 0.$$

2. Ce qui précède donne :

$$\forall A = (a_1, a_2, a_3) \in (]0, +\infty[)^3, \nabla^2 f(A) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2a_1^3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{a_2^3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{9a_3^3} \end{pmatrix}.$$

Soit $A = (a_1, a_2, a_3)$ un élément de $(]0, +\infty[)^3$ et soit $H = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}$ un élément non nul de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Un calcul simple donne : ${}^t H \nabla^2 f(A) H = \frac{h_1^2}{2a_1^3} + \frac{h_2^2}{a_2^3} + \frac{2h_3^2}{9a_3^3}$. Alors ${}^t H \nabla^2 f(A) H \geq 0$ car $\frac{h_1^2}{2a_1^3}$, $\frac{h_2^2}{a_2^3}$ et $\frac{2h_3^2}{9a_3^3}$ sont positifs.

Mieux, comme H n'est pas nulle, l'un de ces trois réels est strictement positif et ainsi ${}^t H \nabla^2 f(A) H > 0$.

$$\forall A \in (]0, +\infty[)^3, \forall H \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) - \{0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})}\}, {}^t H \nabla^2 f(A) H > 0.$$

De toute évidence on a aussi :

$$\forall X \in (]0, +\infty[)^3, \forall H \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}), {}^t H \nabla^2 f(X) H \geq 0, \text{ non ?}$$

3. $(]0, +\infty[)^3$ est un ouvert de \mathbb{R}^3 comme produit de trois ouverts de \mathbb{R} et f est de classe \mathcal{C}^1 sur $(]0, +\infty[)^3$.

Ainsi si f admet en un point $A = (a_1, a_2, a_3)$ de $(]0, +\infty[)^3$ un extremum, alors le gradient de f en A s'annule donc $\left(-\frac{1}{4a_1^2}, -\frac{1}{a_2^2}, -\frac{1}{9a_3^2}\right) = 0_{\mathbb{R}^3}$. C'est hautement improbable !

$$f \text{ n'a pas d'extremum sur } (]0, +\infty[)^3.$$

4. Posons $\mathcal{C} = \{X = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 110\}$ et $\forall X = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, h(X) = x_1 + x_2 + x_3$.

Notons que h est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^3 et que : $\forall X \in \mathbb{R}^3, \nabla h(X) = (1, 1, 1)$.

f est de classe \mathcal{C}^1 sur l'ouvert $(]0, +\infty[)^3$ et h est une forme linéaire sur \mathbb{R}^3 .

Le cours indique alors que si f admet en un point A un extremum sous la contrainte \mathcal{C} alors $\nabla f(A)$ appartient à l'orthogonal de $\text{Ker } h$.

Rappelons que $(\text{Ker } h)^\perp$ est encore $\text{Vect}(\nabla h(X))$ où X est un élément quelconque de \mathbb{R}^3 .

Donc $(\text{Ker } h)^\perp = \text{Vect}((1, 1, 1))$.

Cherchons alors les points A de $\mathcal{C} \cap (]0, +\infty[)^3$ tels que $\nabla f(A)$ appartienne à $\text{Vect}((1, 1, 1))$, c'est à dire les points critiques de f sous la contrainte \mathcal{C} .

- Soit $A = (a_1, a_2, a_3)$ un point critique de f sous la contrainte \mathcal{C} .

$A \in (]0, +\infty[)^3$, $a_1 + a_2 + a_3 = 110$ et $\nabla f(A) \in \text{Vect}((1, 1, 1))$.

$$\nabla f(A) = \left(-\frac{1}{4a_1^2}, -\frac{1}{a_2^2}, -\frac{1}{9a_3^2} \right) \in \text{Vect}((1, 1, 1)). \text{ Donc } -\frac{1}{4a_1^2} = -\frac{1}{a_2^2} = -\frac{1}{9a_3^2}.$$

Ceci donne $4a_1^2 = a_2^2 = 9a_3^2$ puis $2a_1 = a_2 = 3a_3$ car a_1, a_2 et a_3 sont positifs.

Alors $110 = a_1 + a_2 + a_3 = a_1 + 2a_1 + \frac{2}{3}a_1 = \frac{11}{3}a_1$. Ainsi $a_1 = 30$, $a_2 = 60$ et $a_3 = 20$. Finalement $A = (30, 60, 20)$.

- Réciproquement posons $A = (30, 60, 20)$. A appartient à $(]0, +\infty[)^3$. $30 + 60 + 20 = 110$ donc A appartient à \mathcal{C} .

$$\text{De plus } \nabla f(A) = \left(-\frac{1}{4 \times 30^2}, -\frac{1}{60^2}, -\frac{1}{9 \times 20^2} \right) = \left(-\frac{1}{3600}, -\frac{1}{3600}, -\frac{1}{3600} \right) \in \text{Vect}((1, 1, 1)) = (\text{Ker } h)^\perp.$$

Donc $A = (30, 60, 20)$ est un point critique de f sous la contrainte \mathcal{C} .

$$\boxed{A = (30, 60, 20) \text{ est l'unique point critique de } f \text{ sous la contrainte } \mathcal{C}.}$$

Soit X un élément de $(]0, +\infty[)^3 \cap \mathcal{C}$. Montrons que $f(X) \geq f(A)$. Posons $H = X - A$. $X = H + A$.

Attention ici H est un élément de \mathbb{R}^3 .

Commençons par montrer que $[A, A + H] = [A, X]$ est dans $(]0, +\infty[)^3$.

Soit Y un élément de $[A, X]$. Il existe un réel λ appartenant à $[0, 1]$ tel que $Y = \lambda A + (1 - \lambda) X$.

Les composantes de A et X sont strictement positives et les réels λ et $1 - \lambda$ sont positifs ou nuls sans être simultanément nuls. Alors les composantes de Y sont strictement positives. Y est donc un élément de $(]0, +\infty[)^3$.

$[A, A + H]$ est contenu dans $(]0, +\infty[)^3$ et f est de classe \mathcal{C}^2 sur $(]0, +\infty[)^3$.

Notons q_A la forme quadratique de \mathbb{R}^3 associée à la matrice symétrique $\nabla^2 f(A)$.

La formule de Taylor appliquée à f à l'ordre 1 montre qu'il existe un élément θ de $]0, 1[$ tel que :

$$f(A + H) = f(A) + \langle \nabla f(A), H \rangle + \frac{1}{2} q_{A+\theta H}(H).$$

A et X sont dans \mathcal{C} donc $h(H) = h(X) - h(A) = 110 - 110 = 0$. Alors H appartient à $\text{Ker } h$. Or $\nabla f(A) \in (\text{Ker } h)^\perp$.

Alors $\langle \nabla f(A), H \rangle = 0$ et ainsi $f(X) = f(A + H) = f(A) + \frac{1}{2} q_{A+\theta H}(H)$.

$$\text{En posant } H = (h_1, h_2, h_3) \text{ on a } f(X) - f(A) = \frac{1}{2} q_{A+\theta H}(H) = \frac{1}{2} (h_1 \ h_2 \ h_3) \nabla^2 f(A + \theta H) \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}.$$

$$\text{En utilisant 2. on obtient alors } f(X) - f(A) = \frac{1}{2} (h_1 \ h_2 \ h_3) \nabla^2 f(A + \theta H) \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} \geq 0.$$

Ainsi $\forall X \in (]0, +\infty[)^3 \cap \mathcal{C}$, $f(X) \geq f(A)$.

$$\boxed{f \text{ admet en } A = (30, 60, 20) \text{ un minimum global sous la contrainte } \mathcal{C} \text{ qui vaut } \frac{11}{360}.$$

3. 3. 2. Méthode de stratification.

1. $(\{T \in I_1\}, \{T \in I_2\}, \{T \in I_3\})$ est un système complet (ou quasi-complet) d'événements.

La formule des probabilités totales donne :

$$\forall x \in \mathbb{R}, P(g(\tilde{U}) \leq x) = P(\{T \in I_1\} \cap \{g(\tilde{U}) \leq x\}) + P(\{T \in I_2\} \cap \{g(\tilde{U}) \leq x\}) + P(\{T \in I_3\} \cap \{g(\tilde{U}) \leq x\}). \text{ Alors :}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, P(g(\tilde{U}) \leq x) = P(\{T \in I_1\} \cap \{g(U_1) \leq x\}) + P(\{T \in I_2\} \cap \{g(U_2) \leq x\}) + P(\{T \in I_3\} \cap \{g(U_3) \leq x\}).$$

Rappelons que les variables aléatoires T, U_1, U_2 et U_3 sont indépendantes.

Alors les variables aléatoires $T, g(U_1), g(U_2)$ et $g(U_3)$ le sont également. Ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{R}, P(g(\tilde{U}) \leq x) = P(T \in I_1) P(g(U_1) \leq x) + P(T \in I_2) P(g(U_2) \leq x) + P(T \in I_3) P(g(U_3) \leq x).$$

T suit une loi uniforme sur $[0, 1]$ et $0 < a < b < 1$. Alors :

$$P(T \in I_1) = P(0 \leq T < a) = a, P(T \in I_2) = P(a \leq T < b) = b - a \text{ et } P(T \in I_3) = P(b \leq T \leq 1) = 1 - b.$$

Finalement :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, P(g(\tilde{U}) \leq x) = a P(g(U_1) \leq x) + (b - a) P(g(U_2) \leq x) + (1 - b) P(g(U_3) \leq x).}$$

Soient $F_{g(U_1)}, F_{g(U_2)}, F_{g(U_3)}$ et $F_{g(\tilde{U})}$ les fonctions de répartition respectives de $g(U_1), g(U_2), g(U_3)$ et $g(\tilde{U})$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_{g(\tilde{U})}(x) = a F_{g(U_1)}(x) + (b - a) F_{g(U_2)}(x) + (1 - b) F_{g(U_3)}(x).$$

$F_{g(U_1)}, F_{g(U_2)}$ et $F_{g(U_3)}$ sont continues sur \mathbb{R} donc, par combinaison linéaire, $F_{g(\tilde{U})}$ est continue sur \mathbb{R} .

Soient $f_{g(U_1)}, f_{g(U_2)}$ et $f_{g(U_3)}$ des densités respectives de $g(U_1), g(U_2)$ et $g(U_3)$ définies sur \mathbb{R} .

$f_{g(U_1)}, f_{g(U_2)}$ et $f_{g(U_3)}$ sont continues sur \mathbb{R} privé d'un ensemble fini de points. Alors on peut trouver une partie finie D de \mathbb{R} telle que $f_{g(U_1)}, f_{g(U_2)}$ et $f_{g(U_3)}$ soient toutes les trois continues sur $\mathbb{R} - D$.

Dans ces conditions $F_{g(U_1)}, F_{g(U_2)}$ et $F_{g(U_3)}$ sont de classe \mathcal{C}^1 sur $\mathbb{R} - D$.

$$\text{De plus } \forall x \in \mathbb{R} - D, F'_{g(U_1)}(x) = f_{g(U_1)}(x), F'_{g(U_2)}(x) = f_{g(U_2)}(x) \text{ et } F'_{g(U_3)}(x) = f_{g(U_3)}(x).$$

Alors $F_{g(\tilde{U})}$ est de classe \mathcal{C}^1 sur $\mathbb{R} - D$ où D est finie et continue sur \mathbb{R} . $g(\tilde{U})$ est donc une variable aléatoire à densité.

$$\forall x \in \mathbb{R} - D, F'_{g(\tilde{U})}(x) = a F'_{g(U_1)}(x) + (b - a) F'_{g(U_2)}(x) + (1 - b) F'_{g(U_3)}(x) = a f_{g(U_1)}(x) + (b - a) f_{g(U_2)}(x) + (1 - b) f_{g(U_3)}(x).$$

$a f_{g(U_1)} + (b - a) f_{g(U_2)} + (1 - b) f_{g(U_3)}$ est une fonction définie et positive sur \mathbb{R} qui coïncide avec $F'_{g(\tilde{U})}$ sur \mathbb{R} privé d'un ensemble fini de points. C'est donc une densité de $g(\tilde{U})$.

Soient $f_{g(U_1)}, f_{g(U_2)}$ et $f_{g(U_3)}$ des densités respectives de $g(U_1), g(U_2)$ et $g(U_3)$, définies sur \mathbb{R} .

$g(\tilde{U})$ est une variable aléatoire à densité admettant pour densité la fonction

$$f_{g(\tilde{U})} = a f_{g(U_1)} + (b - a) f_{g(U_2)} + (1 - b) f_{g(U_3)}.$$

Supposons que $\forall x \in [0, 1], g(x) = x$. Alors $g(\tilde{U}) = \tilde{U}, g(U_1) = U_1, g(U_2) = U_2$ et $g(U_3) = U_3$.

$g(U_1), g(U_2)$ et $g(U_3)$ sont bien des variables aléatoires à densité. Posons : $\forall x \in \mathbb{R}, f_{U_1}(x) = \begin{cases} \frac{1}{a} & \text{si } x \in [0, a[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$,

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_{U_2}(x) = \begin{cases} \frac{1}{b - a} & \text{si } x \in [a, b[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}, f_{U_3}(x) = \begin{cases} \frac{1}{1 - b} & \text{si } x \in [b, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Pour tout i dans $\llbracket 1, 3 \rrbracket$, f_{U_i} est une densité de U_i ou de $g(U_i)$.

D'après ce précède $g(\tilde{U})$ donc \tilde{U} est une variable aléatoire à densité admettant $a f_{U_1} + (b - a) f_{U_2} + (1 - b) f_{U_3}$ pour densité.

$$\text{Posons } f_{\tilde{U}} = a f_{U_1} + (b - a) f_{U_2} + (1 - b) f_{U_3}.$$

$$\forall x \in [0, a[, f_{\tilde{U}}(x) = a f_{U_1}(x) + (b-a) f_{U_2}(x) + (1-b) f_{U_3}(x) = a \frac{1}{a} + (b-a) \times 0 + (1-b) \times 0 = 1.$$

On montre de même que $\forall x \in [a, b[, f_{\tilde{U}}(x) = 1$ et que $\forall x \in [b, 1], f_{\tilde{U}}(x) = 1$.

De plus : $\forall x \in \mathbb{R} - [0, 1], f_{\tilde{U}}(x) = a \times 0 + (b-a) \times 0 + (1-b) \times 0 = 0$. Finalement : $\forall x \in \mathbb{R}, f_{\tilde{U}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Ainsi :

$$\boxed{\tilde{U} \text{ suit une (la) loi uniforme sur } [0, 1].}$$

2. U_1 prend ses valeurs dans $I_1 = [0, a[$ et g est continue sur cet intervalle. Alors le théorème de transfert montre que $g(U_1)$ possède une espérance si et seulement si $\int_0^a g(t) f_{U_1}(t) dt$ est absolument convergente.

Ceci est clair car $\forall t \in [0, a[, |g(t) f_{U_1}(t)| = \frac{1}{a} |g(t)|$ et $|g|$ est continue sur $[0, 1]$ (oui sur $[0, 1]$!)

Finalement $E(g(U_1))$ possède une espérance. On montre de même que $E(g(U_2))$ et $E(g(U_3))$ existent.

Ce qui précède donne aussi l'existence des intégrales $\int_{-\infty}^{+\infty} t f_{g(U_1)}(t) dt$, $\int_{-\infty}^{+\infty} t f_{g(U_2)}(t) dt$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} t f_{g(U_3)}(t) dt$.

Or $\forall t \in \mathbb{R}, t f_{g(\tilde{U})}(t) = a t f_{g(U_1)}(t) + (b-a) t f_{g(U_2)}(t) + (1-b) t f_{g(U_3)}(t)$.

Ainsi $\int_{-\infty}^{+\infty} t f_{g(\tilde{U})}(t) dt$ existe et vaut : $a \int_{-\infty}^{+\infty} t f_{g(U_1)}(t) dt + (b-a) \int_{-\infty}^{+\infty} t f_{g(U_2)}(t) dt + (1-b) \int_{-\infty}^{+\infty} t f_{g(U_3)}(t) dt$

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} t f_{g(\tilde{U})}(t) dt$ existe et vaut : $a E(g(U_1)) + (b-a) E(g(U_2)) + (1-b) E(g(U_3))$. Par conséquent :

$$\boxed{g(\tilde{U}) \text{ possède une espérance qui vaut } a E(g(U_1)) + (b-a) E(g(U_2)) + (1-b) E(g(U_3)).}$$

3. Les variables aléatoires de la suite $(U_{1,1}, \dots, U_{1,n_1}, U_{2,1}, \dots, U_{2,n_2}, U_{3,1}, \dots, U_{3,n_3})$ étant indépendantes il en est de même de celles de la suite $(g(U_{1,1}), \dots, g(U_{1,n_1}), g(U_{2,1}), \dots, g(U_{2,n_2}), g(U_{3,1}), \dots, g(U_{3,n_3}))$. De plus les variables aléatoires de cette suite possèdent une variance. Alors Z possède une variance et :

$$V(Z) = \left(a \frac{1}{n_1}\right)^2 \sum_{i=1}^{n_1} V(g(U_{1,i})) + \left((b-a) \frac{1}{n_2}\right)^2 \sum_{i=1}^{n_2} V(g(U_{2,i})) + \left((1-b) \frac{1}{n_3}\right)^2 \sum_{i=1}^{n_3} V(g(U_{3,i})). \text{ Notons que :}$$

$$\forall i \in [1, n_1], V(g(U_{1,i})) = V(g(U_1)), \forall i \in [1, n_2], V(g(U_{2,i})) = V(g(U_2)) \text{ et } \forall i \in [1, n_3], V(g(U_{3,i})) = V(g(U_3)).$$

Alors $V(Z) = \left(a \frac{1}{n_1}\right)^2 n_1 V(g(U_1)) + \left((b-a) \frac{1}{n_2}\right)^2 n_2 V(g(U_2)) + \left((1-b) \frac{1}{n_3}\right)^2 n_3 V(g(U_3))$. Finalement

$$\boxed{Z \text{ possède une variance et } V(Z) = a^2 \frac{1}{n_1} V(g(U_1)) + (b-a)^2 \frac{1}{n_2} V(g(U_2)) + (1-b)^2 \frac{1}{n_3} V(g(U_3)).}$$

4. Dans ces conditions $V(Z) = \frac{1}{4n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{9n_3}$.

On cherche donc (n_1, n_2, n_3) dans $(\mathbb{N}^*)^3$ tel que $n_1 + n_2 + n_3 = 110$ et tel que $V(Z)$ soit minimum.

3.3.1 indique que $(30, 60, 20)$ est le seul triplet qui convient.

Remarquons alors que : $E(Z) = \left(a \frac{1}{n_1}\right) \sum_{i=1}^{n_1} E(g(U_{1,i})) + \left((b-a) \frac{1}{n_2}\right) \sum_{i=1}^{n_2} E(g(U_{2,i})) + \left((1-b) \frac{1}{n_3}\right) \sum_{i=1}^{n_3} E(g(U_{3,i}))$.

Notons que :

$$\forall i \in [1, n_1], E(g(U_{1,i})) = E(g(U_1)), \forall i \in [1, n_2], E(g(U_{2,i})) = E(g(U_2)) \text{ et } \forall i \in [1, n_3], E(g(U_{3,i})) = E(g(U_3)).$$

Alors $E(Z) = \left(a \frac{1}{n_1}\right) n_1 E(g(U_1)) + \left((b-a) \frac{1}{n_2}\right) n_2 E(g(U_2)) + \left((1-b) \frac{1}{n_3}\right) n_3 E(g(U_3))$.

Donc $E(Z) = a E(g(U_1)) + (b-a) E(g(U_2)) + (1-b) E(g(U_3)) = E(g(\tilde{U}))$. Finalement : $E(Z) = E(g(\tilde{U}))$.

Or \tilde{U} a même loi que U donc $g(\tilde{U})$ a même loi que $g(U)$ et ainsi $E(g(\tilde{U})) = E(g(U)) = J$.

$$E(Z) = J.$$

Pour que $E(Z)$ fournisse une estimation de J (? ?) avec le plus petit risque d'erreur possible suivant cette méthode il convient de donner à n_1, n_2, n_3 les valeurs 30, 60 et 20.
