CCP PC – Epreuve 1 – 2006 -

Partie I –

1 Si $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$, alors $(x \mid y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ car la base B est orthonormale, soit $(x \mid y) = {}^tXY = {}^tYX$.

2 Projecteur orthogonal sur H :

a C'est un résultat du cours : si $(e_1, \ldots, e_k)$ est une $\boxed{\text{base orthonormale de H,}}$ alors

$$\forall z \in F \quad p(z) = \sum_{i=1}^{k} (z \mid e_k) e_k$$

b Matrice de p dans une base orthonormale de F :

i $\forall z \in F \quad p(z) = \sum_{i=1}^{k} (z \mid e_i) e_i$ a pour matrice $M(p)Z = \sum_{i=1}^{k} \left({}^tE_iZ\right)E_i$ Comme ${}^tE_iZ$ est un réel, on peut permuter les termes : $M(p)Z = \sum_{i=1}^{k} E_i \left({}^tE_iZ\right)$ Or E_i est une matrice de taille (n,1), ${}^tE_i$ de taille (1,n) et Z de taille (n,1) ; le produit $E_i\,{}^tE_i\,Z$ est défini (et le produit des matrices est une opération associative) : $\sum_{i=1}^{k} E_i\,{}^tE_iZ = M(p)\,Z$

ii $\forall z \in F$ p(z) a pour matrice $\left(\sum_{i=1}^{k} E_i\,{}^tE_i\right)Z$. Or la matrice d'une application linéaire, relativement à une base donnée, est unique : $M(p) = \sum_{i=1}^{k} E_i\,{}^tE_i$

c $\forall z \in F \ \exists !\, (y, t) \in H \times H^{\perp} \,/\, z = y + t$, où $H^{\perp}$ est l'orthogonal de H dans F (et $F = H \oplus H^{\perp}$) Alors $p(z) = y$, $\| p(z) \|^2 = \| y \|^2$ et (théorème de Pythagore) $\| z \|^2 = \| y \|^2 + \| t \|^2 \geq \| y \|^2$, ce qui permet de conclure : $\| z \| \geq \| p(z) \|$.

3 Etude d'un exemple.

a M est une matrice symétrique réelle, on calcule $M^2 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = M$: M est la matrice d'un projecteur p . Comme M est symétrique et la base est orthonormale, l'endomorphisme p est symétrique. Conséquence (on utilise le rappel donné en début d'énoncé, mais que vous deviez connaître) : p est un projecteur orthogonal.

b On peut remarquer, en notant (v_1, v_2, v_3, v_4) la base canonique, que $p(v_3) = -\,p(v_1)$ et $p(v_4) = -\,p(v_2)$. Ainsi $rg(M) = rg(\,p(v_1), p(v_2), p(v_3), p(v_4)) = rg(\,p(v_1), p(v_2)) = 2$ (les deux vecteurs ne sont pas proportionnels).
Conclusion : rg(M) = rg(p) = 2 et (formule du rang) dim(Ker(p)) = 2.

i Im(p) a pour base $\{p(v_1), p(v_2)\}$, qui est une famille orthogonale. Une base orthonormale de Im(p) est obtenue en normant ces vecteurs : $\left\{\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$

ii En utilisant les remarques précédentes, $v_1 + v_3$ et $v_2 + v_4$ sont des vecteurs de Ker(p), formant une famille libre (ils ne sont pas proportionnels), donc une base de Ker(p). Ils sont orthogonaux. Là encore, il suffit de les normer pour obtenir une base orthonormale de Ker(p), ce qui donne : $\left\{\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$

4 Valeurs propres de por :

a Le vecteur u vérifie : (por)(u) = λu et puisque $\lambda \neq 0$, $u = \frac{1}{\lambda} p(r(u)) \in \mathrm{Im}(p) = H$ En particulier p(u) = u et p(r(u) - λu) = λu - λu = 0_E : $r(u) - \lambda u \in \mathrm{Ker}(p) = H^{\perp}$

b Comme $u \in H$ et $r(u) - \lambda u \in H^{\perp}$ $(r(u) - \lambda u | u) = 0$ ie $(r(u) \mid u) = \lambda \| u \|^2$
Par définition de r, projecteur orthogonal de F sur K: u s'écrit de manière unique
$u = r(u) + z$, où $z \in K^{\perp}$ et $(r(u) \mid u) = (r(u) \mid r(u) + z) = \| r(u) \|^2$
On obtient bien l'égalité: $\| r(u) \|^2 = \lambda \| u \|^2$

c Puisque u est non nul, $\| u \|^2 > 0$: $\lambda = \frac{\|r(u)\|^2}{\|u\|^2} \geq 0$.

On applique la question 2c à r, projecteur orthogonal : $\lambda \leq 1$.

5 Hypothèse : p et r commutent.

a Alors $(por)^2 = p^2 \circ r^2 = por$: por est un projecteur.
La matrice de por dans la base orthonormale de F est P.R, où P et R sont symétriques, et commutent. Alors ${}^t(PR) = {}^tR\, {}^tP = RP$ puisque P et R sont symétriques
= PR puisque P et R commutent.

La matrice de por dans une base orthonormale est symétrique (réelle) : por est un endomorphisme symétrique et un projecteur, ie un $\boxed{\text{projecteur orthogonal.}}$

Remarque : on peut également montrer directement que por est un endomorphisme symétrique en calculant pour tout couple (x, y) d'éléments de E :
((por)(x) | y) = (p (r(x)) | y) = (r(x) | p(y)) car p est symétrique
= (x | r(p(y)) car r est symétrique
= (x | (por) (y)) car p et r commutent.

b Puisque por est un projecteur, sp(por) $\subset \{0, 1\}$ et por est diagonalisable. Puisque por est non nul, il y a donc une valeur propre non nulle : 1.

0 est-elle valeur propre ? si 0 n'est pas valeur propre, alors le projecteur por n'a qu'une seule valeur propre, 1, et por = id_F ; p est un endomorphisme inversible de F, ce qui n'est pas possible car son image : H, est incluse strictement dans F. Conclusion : 0 est valeur propre de por et $\boxed{sp(por) = \{0, 1\}.}$

c Comparaison des noyaux et images :

i Soit $y \in \mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(r)$; alors $y \in \mathrm{Im}(p)$ et p(y) = y ; de même $y \in \mathrm{Im}(r)$ et r(y) = y.
Conséquence : (por)(y) = p(y) = y : $y \in \mathrm{Im}(por)$. Ainsi $\mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(r) \subset \mathrm{Im}(por)$.

Réciproquement: soit $y \in \mathrm{Im}(por)$; $\exists\, x \in F$ / y = (por)(x) = p(r(x)) $\in$ Im(p) et de même (p et r commutent) y = r (p(x)) $\in$ Im(r). Ainsi $\mathrm{Im}(por) \subset \mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(r)$
Conclusion: $\boxed{\mathrm{Im}(por) = \mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(r).}$

ii Soit $x \in \mathrm{Ker}(p) + \mathrm{Ker}(r)$; alors $\exists (y, z) \in \mathrm{Ker}(p) \times \mathrm{Ker}(r) / x = y + z$.
$(por)(x) = (por)(y) + (por)(z) = r(p(y)) + p(r(z)) = 0_E$: $x \in \mathrm{Ker}(por)$. La 1° inclusion est prouvée.

Réciproquement : soit $x \in \mathrm{Ker}(por)$.
On veut écrire $x = a + b$, $a \in \mathrm{Ker}(p)$ et $b \in \mathrm{Ker}(r)$. Or $p(r(x)) = 0_E$ donc $r(x) \in \mathrm{Ker}(p)$; on essaie $a = r(x)$; alors $b = x - r(x)$. Vérification : $a \in \mathrm{Ker}(p)$ et
$r(b) = r(x - r(x)) = r(x) - r^2(x) = 0_E$ car r est un projecteur : $b \in \mathrm{Ker}(r)$.
Conséquence $x \in \mathrm{Ker}(p) + \mathrm{Ker}(r)$. La 2° inclusion est prouvée, et l'égalité avec elle.

6 Utilisation de matrices par blocs :

a P et R sont les matrices de projecteurs orthogonaux dans une base orthonormale, ce qui signifie que :

i P et R sont donc symétriques ; ainsi ${}^tR = R$ équivaut à ${}^tA = A$, ${}^tC = B$, ${}^tB = C$ et ${}^tD = D$.

ii $P^2 = P$, ce qui est vérifié, et $R^2 = R$. Comme $R^2 = \begin{pmatrix} A^2 + BC & AB + BD \\ CA + DC & CB + D^2 \end{pmatrix}$, on obtient les égalités : $A^2 + BC = A$, $AB + BD = B$, $CB + D^2 = D$. Toutes les égalités demandées ont été trouvées.

b Méthode : une démonstration circulaire.

i Hypothèse : $sp(por) \subset \{0, 1\}$. La matrice de por est $PR = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; le spectre de por est donc formé de 0 et des valeurs propres de A. Ainsi $sp(A) \subset \{0, 1\}$
Comme A est symétrique réelle, A est diagonalisable dans une base orthonormale.
Soit $(f_1, \ldots, f_k)$ une base orthonormale de $\mathbb{R}^k$ formée de vecteurs propres de A, $(X_1 \ldots, X_k)$ les matrices colonnes associées à ces vecteurs dans la base de départ.
$\forall i \in \{1, \ldots, k\} \quad AX_i = \lambda_i X_i$, $\lambda_i \in \{0, 1\}$
On utilise : $A^2 + BC = A$: $\lambda_i^2 X_i + BCX_i = \lambda_i X_i$ et comme $\lambda_i^2 = \lambda_i$: $BCX_i = 0$
Puisque $(X_1 \ldots, X_k)$ est une base de $M_{k,1}(\mathbb{R})$ $BC = 0 = {}^tCC$.

ii On suppose ${}^tCC = 0$. Deux méthodes possibles :
(1) si $C = (c_{i,j})_{\substack{1\le i\le n-k \\ 1\le j\le k}}$, ${}^tCC$ est une matrice de taille (k, k) dont le terme général est $\gamma_{i,j} = \sum_{p=1}^{n-k} c_{p,i}c_{p,j}$; pour i = j $\gamma_{i,i} = \sum_{p=1}^{n-k} c_{p,i}^2 = 0$ puisque ${}^tCC = 0$ Comme les nombres $c_{p,i}$ sont des réels : $\forall i \in \{1, \ldots, k\}$ $\forall p \in \{1, \ldots, n\text{-}k\}$ $c_{p,i} = 0$ ie $C = 0$
(2) ou bien : $\forall Y \in \mathbb{R}^k$ ${}^tY{}^tCCY = \| CY \|^2 = 0$ car ${}^tCC = 0$.
Ainsi $\forall Y \in \mathbb{R}^k$ $CY = 0$, ce qui signifie que $C = 0$.

iii On suppose $C = 0$; alors $B = {}^tC = 0$, $R = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$ et $PR = RP = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$: p et r commutent.

iv On suppose que p et r commutent. Alors (question 5.a) por est un projecteur orthogonal et pour tout projecteur : $sp(por) \subset \{0, 1\}$

Partie II –

1 Plusieurs méthodes possibles :

a Utilisation directe du cours : $\min \{ \| f(x) - v \|, x \in E\} = \min \{ \| y - v \|, y \in \mathrm{Im}(f)\} = \| y_0 - v\|$ où y_0 est le projeté orthogonal de v sur Im(f).
Comme $y_0 \in \mathrm{Im}(f)$, $\exists x_0 \in E / y_0 = f(x_0)$ et $v = f(x_0) + z$

b Démonstration : soit $v \in F$; $\exists !\ (y, z) \in \mathrm{Im}(f) \times \mathrm{Im}(f)^{\perp}$ / $v = y + z$.
Puisque $y \in \mathrm{Im}(f)$ $\exists\ x_0 \in E$ / $y = f(x_0)$.

$\forall x \in E$ $\| f(x) - v \|^2 = \| f(x) - f(x_0) - z \|^2 = \| f(x-x_0) - z \|^2$ On peut appliquer le théorème de Pythagore puisque $f(x-x_0) \in \mathrm{Im}(f)$ et $z \in \mathrm{Im}(f)^{\perp}$:

$$\| f(x) - v \|^2 = \| f(x-x_0) \|^2 + \| z \|^2 \geq \| z \|^2 = \| f(x_0) - v \|^2$$

Ainsi $\{ \| f(x) - v \|, x \in E\}$ admet un minimum qui est $\| f(x_0) - v \|$. Ce minimum est atteint pour tout vecteur x tel que $\| f(x-x_0) \|^2$, ie pour tout vecteur x tel que $f(x) = f(x_0)$ ie $v = f(x) + z$, $z \in \mathrm{Im}(f)^{\perp}$

2 Soit $x_1 \in E$ tel que $\| f(x_0) - v \| = \| f(x_1) - v \|$. En remplaçant x par x_1 dans la suite d'inégalités précédentes, on obtient : $\| f(x_1-x_0) \|^2 = 0$ ie $f(x_1) = f(x_0)$. f étant injective, $x_1 = x_0$.

3

a Hypothèse : x_0 est pseudo-solution de (*). Alors $f(x_0) = y = v - z$, $z \in \mathrm{Im}(f)^{\perp}$:
$\forall x \in E$ $(f(x) \mid f(x_0) - v) = (f(x) \mid - z) = 0$ car $f(x) \in \mathrm{Im}(f)$ et $z \in \mathrm{Im}(f)^{\perp}$.

b Réciproquement, on suppose que le vecteur x_1 vérifie : $\forall x \in E$ $(f(x) \mid f(x_1) - v) = 0$; alors $f(x_1) - v \in \mathrm{Im}(f)^{\perp}$. Ainsi $v = f(x_1) - (f(x_1) - v)$, où $f(x_1) \in \mathrm{Im}(f)$ et $v - f(x_1) \in \mathrm{Im}(f)^{\perp}$.
Comme la décomposition de v comme somme d'un vecteur de Im(f) et $\mathrm{Im}(f)^{\perp}$ est unique, cela signifie que $f(x_1) = f(x_0)$ ie (question 1) que x_1 est pseudo-solution de (*).

4 Pour tout vecteur x de E, f(x) a pour matrice AX, $f(x_0)$ a pour matrice AX_0 et v a pour matrice V.
Comme C est une base orthonormale de F, $(f(x) \mid f(x_0) - v) = {}^t(AX) (AX_0 - V)$ ie :
$\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ ${}^tX{}^tAAX_0 - {}^tX\,{}^tA\,V = 0 = {}^tX({}^tAAX_0 - {}^tA\,V) = 0$

Remarque : on note n = dim(E), k = dim(F) ; alors A est de taille (k, n), V de taille (k, 1) et la matrice ${}^tAAX_0 - {}^tA\,V$ est de taille (n, 1).

a Si ${}^tAAX_0 - {}^tA\,V = 0$, l'égalité demandée est évidemment vérifiée.

b Réciproquement, si $\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ ${}^tX({}^tAAX_0 - {}^tA\,V) = 0$
on écrit cette égalité pour les n matrices colonnes X telles que ${}^tX = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, correspondant aux vecteurs de la base B. Les n coefficients de la matrice ${}^tAAX_0 - {}^tA\,V$ sont nuls, ie cette matrice est nulle.
Autre méthode : soit $L = {}^tAAX_0 - {}^tAV$.
$\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ ${}^tX({}^tAAX_0 - {}^tA\,V) = 0$ En particulier pour X = L : ${}^tLL = \| L \|^2 = 0$ ie L = 0.

c Conclusion x_0 est pseudo-solution de (*) si et seulement si ${}^tAAX_0 = {}^tAV$.

5 On commence par calculer ${}^tAA = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 6 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \end{bmatrix}$. On note $X_0 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et le système : ${}^tAAX_0 = {}^tAV$ est

alors équivalent à : $\begin{cases} 3x - 3z = 0 \\ 6y = 3 \\ -3x + 3z = 0 \end{cases}$ soit à $\begin{cases} x = z \\ y = 1/2 \end{cases}$. Les solutions sont les vecteurs $X_0 = \begin{pmatrix} x \\ 1/2 \\ x \end{pmatrix}$,

$x \in \mathbb{R}$.

6

a On suppose que la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est orthonormale. Dans ce cas

$\sum_{k=1}^{n} (\lambda a_k + \mu b_k - c_k)^2 = \|\lambda a + \mu b - c\|^2$ Interprétation usuelle (cf cours) : lorsque les réels λ et

μ décrivent R, la somme $\lambda a+\mu b$ décrit l'espace vectoriel F = Vect[a, b], et cette somme est minimale lorsque
$\lambda a + \mu b$ est le projeté orthogonal de c sur F.

Soit (e_1, e_2) base canonique de $\mathbb{R}^2$, f l'application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^n$ définie par :
$f(e_1) = a$ et $f(e_2) = b$ (on rappelle qu'une application linéaire est $\boxed{\text{caractérisée}}$ par l'image d'une base). Ainsi $\sum_{k=1}^{n}(\lambda a_k + \mu b_k - c_k)^2 = \|f(\lambda e_1 + \mu e_2) - c\|^2$ atteint son minimum pour
$x_0 = \lambda e_1 + \mu e_2$ pseudo-solution de l'équation : f(x) = v = c (*) (résultat de la question 1)

La matrice de f est $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ a_n & b_n \end{pmatrix}$

b Rappel : une application linéaire $f : E \to F$ est injective si et seulement si l'image d'une base de E est une famille libre (de F).
Conséquence : f est injective si et seulement si la famille $\{f(e_1), f(e_2)\} = \{a, b\}$ est libre.

c Conséquence (question 2) : le problème posé admet une unique solution, solution de
l'équation : ${}^tAAX_0 = {}^tAV$; or ${}^tAA = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & \cdots & a_n \\ b_1 & \cdots & \cdots & b_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ a_n & b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \|a\|^2 & (a\,|\,b) \\ (a\,|\,b) & \|b\|^2 \end{pmatrix}$ et

${}^tA\,V = {}^tAC = \begin{pmatrix} (a\,|\,c) \\ (b\,|\,c) \end{pmatrix}$ On obtient un système de deux équations à deux inconnues, qui admet une solution unique, car f est inversible (ce qui implique que la matrice ${}^tAA$ est inversible ; on pourrait aussi le vérifier avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz et le cas d'égalité, ce que je vous laisse faire) On résout donc avec énergie ce système : $\lambda = \dfrac{\|b\|^2(a\,|\,c) - (a\,|\,b)(b\,|\,c)}{\|a\|^2\|b\|^2 - (a\,|\,b)^2}$ et

$\mu = \dfrac{\|a\|^2(b\,|\,c) - (a\,|\,b)(a\,|\,c)}{\|a\|^2\|b\|^2 - (a\,|\,b)^2}$

Partie III –
1
a Existence d'une décomposition.
F est un espace vectoriel euclidien tel que $Im(f) \subset F$: $F = Im(f) \oplus Im(f)^{\perp}$. Ainsi :
$\forall\, y \in F\ \exists\,!\,(x', y') \in Im(f) \times Im(f)^{\perp} / y = x' + y'$.
Puisque $x' \in Im(f)$ $\exists\, z \in E / x' = f(z)$
Enfin Ker(f) est un sous-espace vectoriel de E, espace vectoriel euclidien :
$E = Ker(f) \oplus Ker(f)^{\perp}$:
$\exists\,!\,(x_1, x) \in Ker(f) \times Ker(f)^{\perp} /\ z = x_1 + x$ et f(z) = f(x) puisque $x_1 \in Ker(f)$.
Conclusion : $\exists\,(x, y) \in (Ker(f))^{\perp} \times (Im(f))^{\perp} / y = f(x) + y'$

b Unicité de cette décomposition : on suppose qu'il existe un deuxième couple (x_1, y_1') de $(Ker(f))^{\perp}$ x $(Im(f))^{\perp}$ tel que y = f(x) + y' = f (x_1) + y_1'.
Alors $f(x - x_1) = y_1' - y_1 \in Im(f) \cap (Im(f))^{\perp} = \{0_F\}$: $y_1' = y_1$ et $f(x-x_1) = 0_F$ ie
$x - x_1 \in Ker(f)$ mais $x - x_1 \in Ker(f)^{\perp}$ (par définition de x et x_1).
Comme $Ker(f) \cap Ker(f)^{\perp} = \{0_E\}$, $x = x_1$. Conclusion: l'unicité du couple (x, y') est effectivement prouvée.

c Linéarité de g : soit $(y, y_1) \in F^2$, $(a, a') \in \mathbb{R}^2$ Alors (questions a et b)
$\exists\,!\,(x, x_1, y', y_1') \in ((Ker(f))^{\perp})^2 \times ((Im(f))^{\perp})^2$ / $y = f(x) + y'$ et $y_1 = f(x_1) + y_1'$
On calcule $ay + by_1 = f(ax + bx_1) + (ay' + by_1')$
Comme $Ker(f)^{\perp}$ et $Im(f)^{\perp}$ sont des sous-espaces vectoriels de E et F respectivement :
$ax + bx_1 \in Ker(f)^{\perp}$, $ay' + by_1' \in Im(f)^{\perp}$ et, par définition de g :
$g(ay + by_1) = ax + bx_1 = ag(y) + bg(y_1)$ $\boxed{\text{g est linéaire.}}$

2 Remarque préliminaire : $Ker(g) \subset F$ et $Im(g) \subset E$. Et même $Im(g) \subset (Ker(f))^{\perp}$.
a Recherche du noyau de g : soit $y \in F$.
$y \in Ker(g) \Leftrightarrow g(y) = x = 0_E \Leftrightarrow y = f(0_E) + y'$, $y' \in (Im(f))^{\perp}$ (décomposition de y vue dans 1a)
$\Leftrightarrow y \in (Im(f))^{\perp}$
Conclusion : $Ker(g) = (Im(f))^{\perp}$
b Recherche de l'image : on sait déjà que $Im(g) \subset (Ker(f))^{\perp}$
On peut utiliser à présent la formule du rang. Puisque g est une application linéaire de F vers E :
dim(Im(g)) = dim(F) – dim(Ker(g)) = dim(F) – (dim(F) – dim(Im(f)) puisque $Im(f) \subset F$
= dim(Im(f)) = dim(E) – Ker(f) (formule du rang appliquée à f , mais f : E $\to$ ..)
= dim($Ker(f)^{\perp}$) (E est un espace vectoriel euclidien)
Conclusion : $Im(g) \subset (Ker(f))^{\perp}$ et les deux espaces vectoriels ont même dimension : ils sont égaux.

3 Projecteurs orthogonaux.
a Etude de gof : soit $x \in E$. $\exists\,!\,(x_1, x_2) \in Ker(f) \times (Ker(f))^{\perp}$ / $x = x_1 + x_2$
Alors $f(x) = f(x_2)$ puisque x_1 appartient au noyau de f
$= f(x_2) + 0_F$: c'est la décomposition de la question 1, unique.
Ce qui permet de calculer $g(f(x)) = x_2 = (gof)(x) = p(x)$ où p(x) est le projeté orthogonal de x sur $(Ker(f)^{\perp})$
Conclusion : gof est le projecteur orthogonal de E sur $Ker(f)^{\perp}$.

b De même : soit $y \in F$. Alors $\exists\,!\,(x, y') \in Ker(f)^{\perp} \times (Im(f))^{\perp}$ / y = f(x) + y' , avec $f(x) \in Im(f)$ et $y' \in Im(f)^{\perp}$. Le projeté orthogonal de y sur Im(f) est f(x).
Par définition de g, g(y) = x et f(g(y)) = f(x)
Conclusion : fog est le projecteur orthogonal de F sur Im(f).

4 Etude d'un premier exemple : on note (i, j, k) la base canonique de $\mathbb{R}^3$, (e_1, e_2) la base canonique de F. Im(f) = Vect[f(i), f(j), f(k)] = Vect[e_1, e_2] = F : donc dim(Im(f)) = 2 et (formule du rang)
dim(Ker(f)) = 1. $v\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in Ker(f) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ y+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow v\begin{pmatrix} x \\ -x \\ x \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. On peut chercher G de deux manières possibles (au moins):

a 1° méthode : recherche de l'expression analytique de G relativement aux bases données. Soit $y\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} \in F$. On cherche $(x, y') \in \mathrm{Ker}(f)^{\perp} \times (\mathrm{Im}(f))^{\perp}$ / $y = f(x) + y'$.

Puisque $\dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(F) = 2$ et $\mathrm{Im}(f) \subset F$, en fait $\mathrm{Im}(f) = F$ et $(\mathrm{Im}(f))^{\perp} = \{0_F\}$: $y' = 0_E$.

On cherche $x\begin{pmatrix}c\\d\\e\end{pmatrix}$ tel que : $f(x) = y$ et $x \perp \mathrm{Ker}(f)$ ie $\begin{cases}a = c + d\\ b = \quad d + e\\ c - d + e = 0\end{cases}$ soit : $\begin{cases}c + d = a\\ \quad d + e = b\\ c - d + e = 0\end{cases}$ On utilise la méthode du pivot : $(3) \leftarrow (3) - (1)$: $\begin{cases}c + d = a\\ \quad d + e = b\\ -2d + e = -a\end{cases}$ puis $(3) \leftarrow (3) + 2(2)$

$\begin{cases}c + d = a\\ \quad d + e = b\\ \quad 3e = 2b - a\end{cases}$ Ainsi $e = \frac{1}{3}(2b - a)$, $d = b - e = \frac{1}{3}(a + b)$ et $c = a - d = \frac{1}{3}(2a - b)$

Ayant obtenu l'expression analytique de g, on en déduit sa matrice qui est : $G = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$

b 2° méthode : recherche des vecteurs colonnes de G.

i D'abord recherche de $g(e_1)$; $e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$. On cherche $z = \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ tel que $f(z) = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et

$z \in \mathrm{Ker}(f)^{\perp}$ soit : $\begin{cases}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\\ a - b + c = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a + b = 1\\ b + c = 0\\ a - b + c = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$

ii De même pour $e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$. On résout le système $\begin{cases}a + b = 0\\ b + c = 1\\ a - b + c = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$

iii Ce qui donne $G = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$, ie le même résultat…

5 Cas d'un endomorphisme symétrique.

a Soit $(x, y) \in \mathrm{Ker}(f) \times \mathrm{Im}(f)$; $\exists z \in E$ / $y = f(z)$

On calcule $(x \mid y) = (x \mid f(z)) = (f(x) \mid z)$ car f est symétrique

$= (0_E \mid z) = 0$ car x appartient au noyau de f.

Conséquence : Ker(f) et Im(f) sont orthogonaux, par exemple $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Im}(f)^{\perp}$.

On utilise à présent la formule du rang : $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = \dim(E) - \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(\mathrm{Im}(f)^{\perp})$

Les deux ensembles ont même dimension et $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Im}(f)^{\perp}$.

Conclusion : $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Im}(f)^{\perp}$, ce qui implique $\mathrm{Ker}(f)^{\perp} = (\mathrm{Im}(f)^{\perp})^{\perp} = \mathrm{Im}(f)$.

b Soit x un vecteur propre de f : $f(x) = \lambda x$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

i Si $\lambda = 0$, alors $f(x) = 0_E$ et $x = f(0_E) + x$, $0_E \in (\mathrm{Ker}(f))^{\perp}$ et $x \in \mathrm{Ker}(f) = (\mathrm{Im}(f))^{\perp}$ On a ainsi obtenu la décomposition de la question 1 : $g(x) = 0_E$ et x est vecteur propre de g.

ii Si λ est non nul, alors $x = \frac{1}{\lambda} f(x) = f\left(\frac{1}{\lambda} x\right) + 0_E$, avec $\frac{1}{\lambda} x \in \mathrm{Im}(f) = (\mathrm{Ker}(f))^{\perp}$ (car x appartient à Im(f)) et $0_E \in (\mathrm{Im}(f))^{\perp}$. On a de nouveau la décomposition de la question 1 : on peut calculer $g(x) = \frac{1}{\lambda} x$ et x est bien vecteur propre de g.

Conclusion : tout vecteur propre de f est vecteur propre de g.
Remarque : on a même trouvé la valeur propre associée .

c Puisque f est symétrique, il existe une base de E, orthonormale et formée de vecteurs propres de f (et de g). La matrice de g dans cette base est diagonale, donc symétrique réelle.
Conclusion : g est un endomorphisme symétrique.

6 A est une matrice symétrique réelle : f est un endomorphisme symétrique.
Méthode : on cherche une base orthonormale de vecteurs propres de f, et on connaît leurs images par g, donc la matrice de g dans cette base orthonormale. Il ne restera plus qu'à revenir à la base de départ.

a Le polynôme caractéristique de A est

$P(x) = \begin{vmatrix} 3-x & 2 & 2 \\ 2 & 2-x & 0 \\ 2 & 0 & 4-x \end{vmatrix} =$ 2(-2)(2-x) + [(3-x) (2-x)- 2] (4-x) en développant par rapport à la dernière colonne). On développe : $P(x) = x(x^2 - 9x + 18) = x(x-3)(x-6)$

b A admet trois valeurs propres distinctes ; chaque sous-espace propre est une droite. On en cherche une base.

i Si $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ $AX = 0.X \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+2y+2z=0 \\ 2x+2y=0 \\ 2x+4z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2z \\ y=-x=2z \\ 3x+2y+2z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2z \\ y=2z \end{cases}$ Une base de Ker(A) est le vecteur $\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et une base orthonormale en est le vecteur $a = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

ii On résout de même l'équation : AX = 3X. Une base orthonormale est donnée par le vecteur $b = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

iii On peut faire de même pour le troisième, ou calculer $a \wedge b$ (puisqu'il existe une base orthonormale de vecteurs propres).

iv On prend donc $P = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ P est orthogonale ; ainsi $P^{-1} = {}^tP$.

c $A = PDP^{-1}$, où P = diag(0, 3, 6) et $G = P\Delta P^{-1}$, où $\Delta = (0, 1/3, 1/6)$ (cf question 5b) , ce qui donne $G = \frac{1}{18}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$

Isabelle Meier – PC – Lycée Fabert – 57000 Metz – i.meier@free.fr