

Partie I

1) a) On note C_1, \dots, C_n les colonnes de A , $C'_1, \dots, C'_n, C'_{n+1}, \dots, C'_{2n}$ celles de M , avec : $C'_k = \begin{pmatrix} C_k \\ 0_{n,1} \end{pmatrix}$ pour $1 \leq k \leq n$. Si A est non inversible, ses colonnes sont liées : $\exists(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \neq (0, \dots, 0)$ tq $\lambda_1 C_1 + \dots + \lambda_n C_n = 0_{n,1}$. Alors $\lambda_1 C'_1 + \dots + \lambda_n C'_n = 0_{2n,1}$, donc la famille (C'_1, \dots, C'_n) est liée, donc la famille $(C'_1, \dots, C'_n, C'_{n+1}, \dots, C'_{2n})$ aussi, donc M est non inversible.

b) $XP = M \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} I_n & B \\ 0_{p,n} & C \end{pmatrix}$

c) On calcule les déterminants de X et P en développant suivant les n premières colonnes de X et les p dernières colonnes de P : $\det(X) = \det(C)$ et $\det(P) = \det(A)$

2) Soit $k = \dim(F)$. On prend une base de F , qu'on complète en une base de \mathbf{R}^n . F étant stable par u la matrice de u dans cette base est de la forme M , où A est la matrice de v dans la base choisie de F . On a alors

: $\chi_u(x) = \det \begin{pmatrix} xI_k - A & -B \\ 0_{n-k,k} & xI_{n-k} - C \end{pmatrix} = \det(xI_k - A) \det(xI_{n-k} - C)$ et $\chi_v(x) = \det(xI_k - A)$. Conclusion : χ_v divise χ_u

3) $F_u(x)$ est non vide et stable par CL, et : $y \in F_u(x) \Rightarrow \exists P \in \mathbf{R}[X]$ tq $y = P(u)(x)$. Alors $u(y) = Q(u)(x)$ avec $Q(X) = XP(X)$. Donc $u(y) \in F_u(x)$. Conclusion :

$F_u(x)$ est un SEV de \mathbf{R}^n stable par u

4) a) La famille $(x, u(x), \dots, u^n(x))$ comporte $n+1$ vecteurs dans un EV de dimension n , donc est liée, donc l'ensemble $\{k \in \mathbf{N} / (x, u(x), \dots, u^k(x)) \text{ liée}\}$ n'est pas vide. Il est inclus dans \mathbf{N} donc admet un plus petit élément q , et $q \leq n$. ($x \neq 0_E$ donc (x) est libre : $q \geq 1$)

b) $(x, u(x), \dots, u^q(x))$ est liée, donc $\exists(a_0, \dots, a_q) \neq (0, \dots, 0)$ tq $\sum_{k=0}^q a_k u^k(x) = 0_E$. Or si on pose $S(X) = \sum_{k=0}^q a_k X^k$, on a $\sum_{k=0}^q a_k u^k = S(u)$ et donc $S(u)(x) = 0_E$. Si a_q était nul il resterait $\sum_{k=0}^{q-1} a_k u^k(x) = 0_E$ avec $(a_0, \dots, a_{q-1}) \neq (0, \dots, 0)$, ce qui est faux car la famille $(x, u(x), \dots, u^{q-1}(x))$ est libre par définition de q . Donc $a_q \neq 0$.

Par suite : $u^q(x) \in Vect(x, u(x), \dots, u^{q-1}(x))$ et $u^q(x) = \lambda_0 x + \lambda_1 u(x) + \dots + \lambda_{q-1} u^{q-1}(x)$, d'où $u^{q+1}(x) = \lambda_0 u(x) + \lambda_1 u^2(x) + \dots + \lambda_{q-2} u^{q-1}(x) + \lambda_{q-1} [\lambda_0 x + \lambda_1 u(x) + \dots + \lambda_{q-1} u^{q-1}(x)]$ donc $u^{q+1}(x) \in Vect(x, u(x), \dots, u^{q-1}(x))$ et par récurrence $u^{q+k}(x) \in Vect(x, u(x), \dots, u^{q-1}(x))$ pour tout entier k . Finalement : $\forall P \in \mathbf{R}[X]$, $y = P(u)(x) \in Vect(x, u(x), \dots, u^{q-1}(x))$ donc la famille est

génératrice . Elle est libre , donc $\boxed{(x, u(x), \dots, u^{q-1}(x)) \text{ est une base de } F_u(x)}$.

c) On peut écrire : $u^q(x) = -\alpha_0 x - \alpha_1 u(x) - \dots - \alpha_{q-1} u^{q-1}(x)$. La matrice de u_0 dans la base $(x, u(x), \dots, u^{q-1}(x))$ est : $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & & \vdots & -\alpha_1 \\ & 1 & \ddots & \vdots & \\ & & \ddots & 0 & -\alpha_{q-2} \\ (0) & & & 1 & -\alpha_{q-1} \end{pmatrix}$

. On calcule son polynôme caractéristique en développant suivant la dernière colonne , ce qui donne :

$$\chi_{u_0}(X) = \sum_{i=1}^{q-1} (-1)^{q+i} (-\alpha_{i-1}) 1^{q-1-i} (-X)^{i-1} + (-X - \alpha_{q-1}) (-X)^{q-1} = (-1)^q \sum_{k=0}^q \alpha_k X^k \quad (\text{car } \alpha_q = 1)$$

En particulier : $\chi_{u_0}(u)(x) = (-1)^q \sum_{k=0}^q \alpha_k u^k(x) = \frac{(-1)^q}{\alpha_q} \sum_{k=0}^q \alpha_k u^k(x) = 0_E$. On a vu que χ_{u_0} divise χ_u , donc $\chi_u(X) = K(X) \chi_{u_0}(X)$ et $\chi_u(u) = K(u) \circ \chi_{u_0}(u)$, par suite : $\chi_u(u)(x) = 0_E$

Ceci est vrai pour tout $x \in \mathbf{R}^n$, donc $\boxed{\chi_u(u) = \tilde{0}}$

Partie II

1) $(AX | Y) = {}^t(AX)Y = {}^tX {}^tAY = (X | {}^tAY)$; $Tr(X {}^tY) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n = (X | Y)$

Le calcul donne $(X {}^tY)Z = (Y | Z)X$

2) L'application $(A, B) \mapsto Tr({}^tAB)$ est bilinéaire ; $Tr({}^tAB) = Tr[{}^t({}^tAB)] = Tr({}^tBA)$ donc elle est symétrique . $Tr({}^tAA) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j}^2 \geq 0$, $Tr({}^tAA) = 0 \Leftrightarrow A = 0_n$. φ est un produit scalaire sur $M_n(\mathbf{R})$

$$3) \text{ a) } \begin{pmatrix} I_r \\ 0_{n-r,r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,n-r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r} \end{pmatrix}$$

b) Si A est de rang r , alors il existe 2 matrices inversibles U et V carrées d'ordre n , telles que : $A = U J_r V$, où J_r est la matrice de 3) a) . On pose :

$$B = U \begin{pmatrix} I_r \\ 0_{n-r,r} \end{pmatrix} : B \in M_{n,r}(\mathbf{R}) \text{ et } C = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,n-r} \end{pmatrix} V : C \in M_{r,n}(\mathbf{R})$$

$$c) \text{ Si } r = 1 : B = U \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,1} \\ \vdots \\ u_{n,1} \end{pmatrix} \text{ et } C = (1, 0, \dots, 0)V = (v_{1,1}, v_{1,2}, \dots, v_{1,n})$$

, donc en posant $X = B$ et $Y = {}^t C$, on a : $A = X {}^t Y$, avec X, Y non nulles.
Réciproque claire .

d) Par exemple $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$: il n'y a pas unicité .

Si $A = X {}^t Y = Z {}^t T$, alors : $AT = \|T\|^2 Z = (X {}^t Y)T = (Y | T)X \Rightarrow Z = \lambda X$ avec $\lambda = \frac{(Y|T)}{\|T\|^2}$ (car $\|T\|^2 \neq 0$), $\lambda \neq 0$ car $Z \neq 0$. On remarque que : ${}^t(X {}^t Y) = {}^t(Z {}^t T)$ d'où : $Y {}^t X = T {}^t Z$ et donc de même : $T = \mu Y$ avec $\mu \neq 0$. Alors : $Z {}^t T = \lambda \mu X {}^t Y = X {}^t Y \Leftrightarrow \lambda \mu = 1$

Conclusion : $X {}^t Y = Z {}^t T \Leftrightarrow \exists \lambda \neq 0 \text{ tq } Z = \lambda X \text{ et } T = \frac{1}{\lambda} Y$

4) a) La première colonne de $Z {}^t T$ est $t_1 Z$, etc ... Notons $T_j = (t_1^{(j)}, \dots, t_n^{(j)})$

Soit : $M = \sum_{1 \leq i \leq r} \sum_{1 \leq j \leq s} \lambda_{i,j} Z_i {}^t T_j = 0_n$. La première colonne de M est $\sum_{1 \leq i \leq r} \sum_{1 \leq j \leq s} \lambda_{i,j} t_1^{(j)} Z_i$. Elle

est de la forme $\alpha_{1,1} Z_1 + \dots + \alpha_{1,r} Z_r$ et est nulle, et les colonnes Z_i sont libres

, donc : $\alpha_{1,1} = \sum_{1 \leq j \leq s} \lambda_{1,j} t_1^{(j)} = 0, \dots, \alpha_{1,r} = \sum_{1 \leq j \leq s} \lambda_{r,j} t_1^{(j)} = 0$

De même (2^{ème} colonne) : $\alpha_{2,1} = \sum_{1 \leq j \leq s} \lambda_{1,j} t_2^{(j)} = 0, \dots, \alpha_{2,r} = \sum_{1 \leq j \leq s} \lambda_{r,j} t_2^{(j)} = 0$ etc ... jusqu'à la $n^{\text{ème}}$ colonne de M .

$$\text{On en arrive à } \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} \\ \alpha_{2,1} \\ \vdots \\ \alpha_{n,1} \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^s \lambda_{1,j} T_j = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ donc } \forall j, \lambda_{1,j} = 0, \dots, \sum_{j=1}^s \lambda_{r,j} T_j =$$

0 donc $\forall j, \lambda_{r,j} = 0$. La famille est libre, donc de rang rs .

[Autre méthode : on complète la famille (Z_1, \dots, Z_r) en une base (Z_1, \dots, Z_n) de \mathbf{R}^n ; de même (T_1, \dots, T_n) . Soit P (resp Q) la matrice de passage de la base canonique à la base (Z_1, \dots, Z_n) (resp (T_1, \dots, T_n)). On a : $Z_i = P C_i$, où C_i est la colonne nulle sauf un 1 en position i , et $T_j = Q C_j$ donc $Z_i {}^t T_j = P C_i {}^t C_j {}^t Q = P E_{i,j} {}^t Q$, et les matrices $E_{i,j}$ constituent la base canonique de $M_n(\mathbf{R})$, donc sont libres, d'où le résultat]

b) Ici $r = s = n$, donc la famille $(X_i {}^t Y_j)$ est une base de $M_n(\mathbf{R})$

c) On extrait une famille libre (Z_1, \dots, Z_r) dans (V_1, \dots, V_l) , et (T_1, \dots, T_s) dans (W_1, \dots, W_n) . Les autres matrices V_k (resp W_q) s'expriment comme combinaisons linéaires des Z_i (resp T_j), donc $V_k {}^t W_q$ est CL des $Z_i {}^t T_j$ et le rang est rs .

5) Pour X, Y, Z, T matrices colonnes, on a : ${}^t(X {}^t Y)(Z {}^t T) = Y {}^t X Z {}^t T = (X \mid Z) Y {}^t T$ (d'après II 1) b)) et donc : $Tr [{}^t(X {}^t Y)(Z {}^t T)] = (X \mid Z) Tr(Y {}^t T) = (X \mid Z)(Y \mid T)$

$Tr [{}^t(X_i {}^t Y_j)(X_k {}^t Y_m)] = (X_i \mid X_k)(Y_j \mid Y_m) = \delta_{i,k} \delta_{j,m}$. Par orthonormalité des familles (X_i) et (Y_j) , si $(i, j) \neq (k, m)$, on a 0, sinon 1.

La famille $X_i {}^t Y_j$ est donc orthonormale.

La réciproque est fautive. Ex : $X_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $Y_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$, $Y_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ donne la famille orthonormale $E_{i,j}$, mais n'est pas elle-même orthonormale (cependant si la famille $X_i {}^t Y_j$ est orthonormale, alors les familles (X_i) et (Y_j) sont orthogonales).

6) a) Si A est de rang 1, alors $\exists(X, Y)$ matrices colonnes non nulles telles que $A = X {}^t Y$ donc $A^2 = X {}^t Y X {}^t Y = (Y \mid X)A$ et $Tr(A) = (X \mid Y)$ d'après II 1) b). Conclusion : $A^2 = Tr(A)A$

b) $i) \Leftrightarrow ii)$ est immédiat. $rg(A) = 1$ donc $A \neq 0_n$, donc :

$iii) \Leftrightarrow A^2 = 0_n \Leftrightarrow Tr(A)A = 0_n \Leftrightarrow Tr(A) = 0$. Conclusion : $iii) \Leftrightarrow ii)$

Si $Tr(A) = 0$, alors $A^2 = 0_n$, donc la seule valeur propre de A est 0 et $A \neq 0_n$, donc A n'est pas diagonalisable.

Si $Tr(A) \neq 0$, alors le polynôme : $S(X) = X^2 - Tr(A)X$ est scindé de racines simples, et $S(A) = 0_0$, donc A est diagonalisable. Conclusion : $ii) \Leftrightarrow iv)$

7) Considérons 2 bases (X_i) et (Y_j) de \mathbf{R}^n telles que $\forall(i, j)$, $(X_i \mid Y_j) \neq 0$. Posons $M_{i,j} = X_i {}^t Y_j$. La famille obtenue est libre, donc c'est une base de $M_n(\mathbf{R})$, dont tous les éléments sont des matrices de rang 1 diagonalisables.

Partie III

1) b) $H_0 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$, $Sp(H_0) = \{0, 1, 2\}$, 1 étant valeur

propre double

a) c) $Sp(A_0) = \{1, 2\}$; $Sp(B_0) = \{0, 1\}$; A_0 et B_0 ont 2 valeurs propres distinctes donc sont diagonalisables. Pour H_0 , les SEP associés à 0 et 2 sont de

dimension 1 , et $H_0 - I_4$ et de rang 2 , donc le SEP associé à 1 est de dimension 2 , donc H_0 est diagonalisable .

2) Si b est valeur propre de B , alors elle est aussi valeur propre de tB .
Donc : $a \in Sp(A) \Rightarrow \exists V \neq 0 \text{ tq } AV = aV$; $b \in Sp(B) \Rightarrow \exists W \neq 0 \text{ tq } {}^tBW = bW \Rightarrow {}^tWB = b{}^tW$. Alors :

$\bar{h}_{A,B}(V{}^tW) = AV{}^tW - V{}^tWB = aV{}^tW - bV{}^tW = (a-b)V{}^tW$ et $V{}^tW \neq 0_n$, donc $a - b$ est valeur propre de $\bar{h}_{A,B}$, d'où l'inclusion .

3) Si A est diagonalisable , il existe une base (V_i) de \mathbf{R}^n formée de vecteurs propres de A

Si B est diagonalisable , alors tB aussi , il existe une base (W_j) de \mathbf{R}^n formée de vecteurs propres de tB . Alors la famille $(V_i{}^tW_j)$ est une base de $M_n(\mathbf{R})$ d'après II , formée de vecteurs propres de $h_{A,B}$ qui est donc diagonalisable .

4) $\chi_A(X) = (X - a_1)\dots(X - a_n)$ d'où $\chi_A(B) = (B - a_1I_n)\dots(B - a_nI_n)$ et $\det(\chi_A(B)) = \det(B - a_1I_n)\dots\det(B - a_nI_n)$. Par suite : $\det(\chi_A(B)) = 0 \Leftrightarrow \exists k \text{ tq } \det(B - a_kI_n) = 0 \Leftrightarrow \exists k \text{ tq } a_k \in Sp(B) \Leftrightarrow Sp(B) \cap Sp(A) \neq \emptyset$

5) a) Par hypothèse : $AM - MB = \lambda M \Rightarrow AM = M(B + \lambda I_n)$. De même : $A^2M = AAM = AM(B + \lambda I_n) = M(B + \lambda I_n)(B + \lambda I_n) = M(B + \lambda I_n)^2$ etc ... Donc pour tout $k \in \mathbf{N}$: $A^kM = M(B + \lambda I_n)^k$ et par linéarité , c'est vrai pour tout polynôme P .

b) En particulier si on prend $P = \chi_A$, on a : $\chi_A(A) = 0_n$ d'après la partie I , donc $M\chi_A(B + \lambda I_n) = 0_n$, ce qui implique que $\chi_A(B + \lambda I_n)$ n'est pas inversible (sinon M serait nulle ce qui est faux) .

c) D'après 4) , on en déduit que A et $(B + \lambda I_n)$ ont une valeur propre commune , soit a : $\det(B + \lambda I_n - aI_n) = 0$ donc $b = a - \lambda$ est valeur propre de B et $\lambda = a - b$. On a les 2 inclusions donc $Sp(\bar{h}_{A,B}) = \{(a - b) ; a \in Sp_C(A) , b \in Sp_C(B)\}$

6) $0 \in Sp(\bar{h}_{A,B}) \Leftrightarrow Sp_C(A) \cap Sp_C(B) \neq \emptyset$

7) a) Soit $u_{i,j}$ l'endomorphisme de R^n dont $M_{i,j}$ est la matrice dans la base canonique . La matrice de $u_{i,j}$ dans la base (V_1, \dots, V_n) est $E_{i,j}$, ce qui définit entièrement u donc $M_{i,j}$. De plus $\sum_{i,j} \lambda_{i,j} M_{i,j} = 0_n \Leftrightarrow \sum_{i,j} \lambda_{i,j} u_{i,j} = \tilde{0} \Leftrightarrow \sum_{i,j} \lambda_{i,j} E_{i,j} = 0_n \Leftrightarrow \forall i, j , \lambda_{i,j} = 0$. Donc la famille $(M_{i,j})$ est une base de $M_n(\mathbf{R})$.

b) On a : $AV_k = \lambda_k V_k$ et $M_{i,j} V_k = \delta_{j,k} V_i$ d'où $h_A(M_{i,j}) V_k = AM_{i,j} V_k - M_{i,j} AV_k = \delta_{j,k} AV_i - \lambda_k M_{i,j} V_k = \delta_{j,k} \lambda_i V_i - \lambda_k M_{i,j} V_k = (\lambda_i - \lambda_k) M_{i,j} V_k$. Ceci

est vrai pour tous les vecteurs de la base (V_k) , donc : $h_A(M_{i,j}) = (\lambda_i - \lambda_k)M_{i,j}$.
 . Donc $M_{i,j}$ est vecteur propre de h_A , ce qui prouve que h_A est diagonalisable

c) La matrice de h_A dans la base des $(M_{i,j})$ est diagonale, avec sur la diagonale $\lambda_i - \lambda_j$. $\ker r(h_A)$ est engendré par les matrices $M_{i,j}$ pour lesquelles $\lambda_i = \lambda_j$, c'est à dire pour $(i,j) \in J$ Ceci se produit lorsque : $\lambda_i = \lambda_j = \mu_1$, ce qui donne m_1 choix pour i et autant pour j , donc m_1^2 matrices $M_{i,j}$. Même raisonnement pour μ_2 etc, donc on a $\sum_{i=1}^p m_i^2$ matrices concernées, qui engendrent $\ker(h_A)$.

d) De $m_1 + m_2 + \dots + m_p = n$ et $m_k \geq 1$ donc $m_k^2 \geq m_k$ on déduit : $\dim \ker(h_A) \geq n$. On a égalité ssi $\forall k, m_k^2 = m_k$ c'est à dire $\forall k, m_k = 1$, ce qui signifie que $p = n$ et que les valeurs propres de A sont toutes distinctes.

e) A est supposée semblable à la matrice diagonale D dont les éléments diagonaux d_k sont tous distincts. Alors : $\lambda_0 I_n + \lambda_1 A + \dots + \lambda_{n-1} A^{n-1} = 0_n \Leftrightarrow \lambda_0 I_n + \lambda_1 D + \dots + \lambda_{n-1} D^{n-1} = 0_n \Leftrightarrow \forall k, \lambda_0 + \lambda_1 d_k + \dots + \lambda_{n-1} d_k^{n-1} = 0_n$. Le polynôme $P(X) = \lambda_0 + \lambda_1 X + \dots + \lambda_{n-1} X^{n-1}$ est de degré au plus $n-1$ et admet n racines distinctes, donc est nul, donc tous les λ_i sont nuls. Conclusion : la famille (I_n, A, \dots, A^{n-1}) est libre.

Cette famille est incluse dans $\mathbf{R}[A]$, et comme $\chi_A(A) = 0_n$, A^n est combinaison linéaire de I_n, A, \dots, A^{n-1} , de même que A^{n+1} , etc Donc (I_n, A, \dots, A^{n-1}) est une base de $\mathbf{R}[A]$. On peut noter que $\forall k, h_A(A^k) = 0_n$, donc $\mathbf{R}[A] \subset \ker(h_A)$ et les dimensions étant toutes deux n , on a l'égalité :

$$\boxed{\ker(h_A) = \mathbf{R}[A]}$$

8) h_A étant diagonalisable, ses valeurs propres sont réelles. Si A n'admettait que des valeurs propres complexes, 2 à 2 conjuguées, alors pour $a \in Sp_C(A)$, $a - \bar{a}$ serait valeur propre de h_A ce qui est faux puisque $a - \bar{a} \notin \mathbf{R}$. Donc A admet au moins une valeur propre réelle λ .

Pour tout vecteur $Y \in \mathbf{R}^n$, il existe une matrice $U \in M_n(\mathbf{R})$ telle que $UX = Y$. $(P_{i,j})$ est une base de $M_n(\mathbf{R})$, donc $\exists \alpha_{i,j}$ tq $U = \sum_{i,j} \alpha_{i,j} P_{i,j}$. D'où : $Y = UX = \sum_{i,j} \alpha_{i,j} P_{i,j} X$. Donc la famille $(P_{i,j} X)$ est génératrice de \mathbf{R}^n . On peut en extraire une base.

Pour chaque vecteur de cette base, on a $AX = \lambda X$ et $AP_{i,j} X - P_{i,j} AX = \lambda_{i,j} P_{i,j} X$, d'où $AP_{i,j} X = (\lambda + \lambda_{i,j}) P_{i,j} X$, donc les vecteurs $P_{i,j} X$ sont vecteurs propres de A , qui possède donc une base de vecteurs propres. Donc

A est diagonalisable. On a ainsi prouvé l'équivalence entre la diagonalisabilité de A et celle de h_A .