AUTOUR DE LA FONCTION ZETA ALTERNÉE DE RIEMANN

I. Généralités

1. Soit $x \in \mathbb{R}$; si $x > 0$, alors la suite $\left(\frac{1}{n^x}\right)_{n\geq 1}$ tend vers 0 en décroissant ; donc la série alternée $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ converge ; si $x \leq 0$, la suite $\left(\frac{(-1)^{n-1}}{n^x}\right)_{n\geq 1}$ ne converge pas vers 0, donc la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ diverge (grossièrement).

2. Comme $|-t| < 1$, la série géométrique $\sum (-t)^n$ converge et sa somme vaut $\sum_{k=0}^{+\infty} (-t)^k = \frac{1}{1-(-t)} = \frac{1}{1+t}$; donc la suite (g_n) converge simplement vers la fonction $g : t \mapsto \frac{1}{1+t}$ sur $[0,1[$.
   - La suite (g_n) converge simplement vers la fonction g sur $[0,1[$;
   - la fonction g et les fonctions g_n, $n \in \mathbb{N}$ sont continues (par morceaux) ;
   - *condition de domination* : $\forall t \in [0,1[$, $|g_n(t)| = \left|\frac{1-(-t)^{n+1}}{1+t}\right| = \frac{1-(-t)^{n+1}}{1+t} \leq \frac{2}{1+t} \overset{\text{def}}{=} \phi(t)$; la fonction ϕ est indépendante de n, continue (même sur $[0,1]$) et intégrable sur $[0,1[$.

   D'après le théorème de convergence dominée, la suite $\left(\int_0^1 g_n\right)$ converge vers $\int_0^1 g$.

   Or, $\int_0^1 g_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$; donc $F(1) = \int_0^1 g = \Big[\ln(1+t)\Big]_0^1 = \ln 2$.

3. $\forall n \geq 1, \forall x \geq 2$, $\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n^x}\right| \leq \frac{1}{n^2}$. Comme la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ est indépendante de n et convergente, la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ converge normalement sur $[2,+\infty[$.

   On en déduit qu'elle converge uniformément sur $[2,+\infty[$. Comme, pour tout $n \geq 2$, $\frac{(-1)^{n-1}}{n^x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ et que, pour $n = 1$, $\frac{(-1)^{n-1}}{n^x} = 1$, le théorème de passage à la limite terme à terme permet d'affirmer que $F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x\to+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x} = 1$.

4. *Dérivabilité de F*
   (a) Soit $x > 0$. La fonction $h_x : t \mapsto \frac{\ln t}{t^x}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$ et $h_x'(t) = \frac{t^{x-1}(1-x\ln t)}{t^{2x}}$. Donc h_x' est négative sur l'intervalle $[\mathrm{e}^{1/x},+\infty[$ et positive sur $]0,\mathrm{e}^{1/x}]$. Donc h_x est décroissante sur $[\mathrm{e}^{1/x},+\infty[$ et croissante sur $]0,\mathrm{e}^{1/x}]$.

   On en déduit que la suite $\left(\frac{\ln n}{n^x}\right)_{n\geq 1}$ est décroissante à partir du rang $\mathrm{E}\left(\mathrm{e}^{1/x}\right) + 1$.

   (b) $f_n : x \mapsto (-1)^{n-1}\mathrm{e}^{-x\ln n}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et $f_n'(x) = (-1)^n \frac{\ln n}{n^x}$.

   Soit $a > 0$. On pose $N_a = \mathrm{E}\left(\mathrm{e}^{1/a}\right) + 1$. Pour tout $x \geq a$, la suite $\left(\frac{\ln n}{n^x}\right)_{n\geq N_a}$ tend vers 0 en décroissant ; donc la série alternée $\sum_{n\geq N_a} f_n'(x)$ converge et, pour $n \geq N_a$, son reste d'ordre n, $\rho_n(x)$, vérifie :

   $$|\rho_n(x)| \leq \left|(-1)^{n+1}\frac{\ln(n+1)}{(n+1)^x}\right| \leq \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^a}.$$

   Donc $\sup_{x\geq a} |\rho_n(x)| \leq \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^a} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Donc la série $\sum_{n\geq 1} f_n'$ converge uniformément sur $[a,+\infty[$.

- Pour tout $n \geq 1$, la fonction f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$;
- la série $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$ et sa somme est F ;
- la série $\sum_{n\geq 1} f'_n$ converge uniformément sur tout segment inclus dans $]0,+\infty[$.

D'après le théorème de dérivation terme à terme, F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et

$$\forall x > 0,\ F'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n^x}.$$

5. *Lien avec* ζ

Pour $x > 1$, $F(x) - \zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} - 1}{n^x} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{-2}{(2k)^x} = -2^{1-x} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^x} = -2^{1-x}\zeta(x)$. On en déduit l'égalité : $F(x) = (1-2^{1-x})\zeta(x)$.

Comme $2^{1-x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$, $F(x) \sim \zeta(x)$ au voisinage de $+\infty$ et donc $\zeta(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$.

II. Produit de Cauchy de la série alternée par elle-même

6. *Étude de la convergence*

(a) Lorsque $x > 1$, la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ converge absolument ; donc la série produit de $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ par elle-même converge absolument et sa somme vaut : $\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}\right)^2 = (F(x))^2$.

(b) Pour $x > 0$, $c_n(x) = (-1)^{n-2} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{[k(n-k)]^x}$. Comme $k \mapsto k(n-k)$ est maximum quand $k = \frac{n}{2}$ et que la somme comporte $n-1$ termes, $|c_n(x)| = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{[k(n-k)]^x} \geq (n-1)\frac{1}{[(n/2)^2]^x} = \frac{(n-1)4^x}{n^{2x}}$.

Pour $0 < x \leq \frac{1}{2}$, $\frac{(n-1)4^x}{n^{2x}}$ a une limite strictement positive (finie ou non), donc la suite $(c_n(x))$ ne converge pas vers 0. Donc la série $\sum_{n\geq 2} c_n(x)$ diverge grossièrement.

7. *Cas où* $x = 1$

(a) $\frac{1}{\mathrm{X}(n-\mathrm{X})} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{\mathrm{X}} + \frac{1}{n-\mathrm{X}}\right)$. Donc

$$\begin{aligned} c_n(1) &= (-1)^{n-2} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(n-k)} = (-1)^{n-2}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n-k}\right) = (-1)^{n-2}\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{n-k}\right) \\ &= 2(-1)^{n-2}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} = 2(-1)^{n-2}\frac{H_{n-1}}{n}. \end{aligned}$$

(b) *Monotonie*

$$\begin{aligned} \frac{H_{n-1}}{n} - \frac{H_n}{n+1} &= \frac{1}{n}\left(H_n - \frac{1}{n}\right) - \frac{H_n}{n+1} = H_n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) - \frac{1}{n^2} \\ &\geq \left(1 + \frac{1}{2}\right)\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{n^2} = \frac{n-2}{2n^2(n+1)} \geq 0. \end{aligned}$$

Donc la suite $\left(\frac{H_{n-1}}{n}\right)_{n\geq 2}$ est décroissante.

(c) "Classiquement", $H_n \sim \ln n$ au voisinage de $+\infty$. Donc la suite $\left(\frac{H_{n-1}}{n}\right)_{n\geq 2}$ converge vers 0 en décroissant et la série alternée $\sum_{n\geq 2} c_n(1)$ converge.

III. Calcul de la somme d'une série à l'aide d'une étude de ζ au voisinage de 1

8. *Développement asymptotique en 1*

   (a) On pose $h = x - 1$. Comme F est dérivable en 1, au voisinage de 1, on a :

   $$F(x) = F(1) + hF'(1) + o(h) = \ln 2 + hF'(1) + o(h).$$

   On a aussi : $1 - 2^{1-x} = 1 - \mathrm{e}^{-h\ln 2} = h\ln 2 - \dfrac{\ln^2 2}{2}h^2 + o(h^2)$ au voisinage de $x = 1$.

   (b) *Développement de ζ*

   $$\begin{aligned}\zeta(x) &= \frac{F(x)}{1-2^{1-x}} = \frac{\ln 2 + hF'(1) + o(h)}{h\ln 2 - \dfrac{\ln^2 2}{2}h^2 + o(h^2)} = \frac{1}{h\ln 2}\,\frac{\ln 2 + hF'(1) + o(h)}{1 - \dfrac{\ln 2}{2}h + o(h)}\\ &= \frac{1}{h\ln 2}\left(\ln 2 + hF'(1) + o(h)\right)\left(1 + \frac{\ln 2}{2}h + o(h)\right) = \frac{1}{h\ln 2}\left(\ln 2 + h\left(F'(1) + \frac{\ln^2 2}{2}\right) + o(h)\right)\\ &= \frac{1}{h} + \left(\frac{F'(1)}{\ln 2} + \frac{\ln 2}{2}\right) + o(1)\end{aligned}$$

9. *Développement asymptotique en 1 (bis)*

   (a) Pour $n \geq 1$ et $x \in [1,2]$, $t \mapsto \dfrac{1}{t^x}$ est décroissante sur $[n, n+1]$ (qui est un intervalle de longueur 1), donc $1.\dfrac{1}{(n+1)^x} \leq \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^x} \leq 1.\frac{1}{n^x}$. On en déduit que : $0 \leq v_n(x) \leq \dfrac{1}{n^x} - \dfrac{1}{(n+1)^x}$.

   (b) Pour $x \in [1,2]$, la suite $\left(\dfrac{1}{n^x}\right)_{n\geq 1}$ converge (vers 0) ; comme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k^x} - \frac{1}{(k+1)^x}\right) = 1 - \frac{1}{(n+1)^x}$, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{n^x} - \frac{1}{(n+1)^x}\right)$ converge. De l'encadrement du (a), on déduit la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} v_n(x)$.

   (c) Pour $x \in]1,2]$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} v_k(x) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^x} - \int_1^{n+1}\frac{\mathrm{d}t}{t^x} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \zeta(x) - \int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^x} = \zeta(x) - \frac{1}{x-1}$.

   (d) La série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} v_n$ converge simplement sur $[1,2]$. On note $R_n(x) = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k(x)$ le reste d'ordre n de la série. D'après (a), $0 \leq R_n(x) \leq \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k^x} - \frac{1}{(k+1)^x}\right) = \frac{1}{(n+1)^x} - \lim_{k\to+\infty}\frac{1}{k^x} = \frac{1}{(n+1)^x}$. Donc $\displaystyle\sup_{x\in[1,2]}|R_n(x)| \leq \frac{1}{(n+1)^1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Donc la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} v_n$ converge uniformément sur $[1,2]$.

   (e) Pour $x \in]1,2]$, $v_n(x) = \dfrac{1}{n^x} - \dfrac{1}{1-x}\left(\dfrac{1}{n^{x-1}} - \dfrac{1}{(n+1)^{x-1}}\right)$; $v_n(1) = \dfrac{1}{n} - \ln(n+1) + \ln n$.

   v_n est continue, sauf peut-être en 1.

   En 1 : en posant $h = x - 1$, $\dfrac{1}{n^x} = \dfrac{1}{n} + o(1)$ par continuité de l'exponentielle $x \mapsto n^{-x}$ en 1 et $\dfrac{1}{1-x}\left(\dfrac{1}{n^{x-1}} - \dfrac{1}{(n+1)^{x-1}}\right) = \dfrac{1}{h}\left(\mathrm{e}^{-h\ln n} - \mathrm{e}^{-h\ln(n+1)}\right) = \dfrac{1}{h}\Big((1 - h\ln n + o(h)) - (1 - h\ln(n+1) + o(h)\Big) = \ln(n+1) - \ln n + o(1)$; donc $v_n(x) = \dfrac{1}{n} + \ln(n+1) - \ln n + o(1)$. Donc v_n est continue en 1.

   On en déduit que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} v_n$ est une série de fonctions continues sur $[1,2]$. La convergence uniforme sur $[1,2]$ entraîne donc la continuité de sa somme sur $[1,2]$.

   On en déduit que $\zeta(x) - \dfrac{1}{x-1} = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} v_n(x) = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} v_n(1)\right) + o(1) = \gamma + o(1)$ au voisinage de 1^+. D'où $\zeta(x) = \dfrac{1}{x-1} + \gamma + o(1)$ au voisinage de 1^+.

10. *Application*

    Par unicité du développement limité en 1^+ (éventuellement en multipliant par $(x-1)$), on déduit de 8.(b) et 9.(e) les égalités $a = 1$ et $\dfrac{F'(1)}{\ln 2} + \dfrac{\ln 2}{2} = b = \gamma$. D'où $F'(1) = \ln 2\left(\gamma - \dfrac{\ln 2}{2}\right)$.

D'après **I.**4.(b), $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}\ln n}{n} = -F'(1) = \ln 2\left(\frac{\ln 2}{2} - \gamma\right)$.

IV. Calcul des $F(2k)$ à l'aide des nombres de Bernoulli

11. $B_1' = 1.B_0 = 1$, donc il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $B_1 = \mathrm{X} + k$. Alors $0 = \displaystyle\int_0^1 (t+k)\ \mathrm{d}t = \frac{1}{2} + k$. Donc $k = -\dfrac{1}{2}$ et $B_1 = \mathrm{X} - \dfrac{1}{2}$.

    $B_2' = 2B_1 = 2\mathrm{X} - 1$, donc il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $B_2 = \mathrm{X}^2 - \mathrm{X} + \ell$. Alors $0 = \displaystyle\int_0^1 (t^2 - t + \ell)\ \mathrm{d}t = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \ell$. Donc $\ell = \dfrac{1}{6}$ et $B_2 = \mathrm{X}^2 - \mathrm{X} + \dfrac{1}{6}$.
12. Pour $n \geq 2$, $B_n(1) - B_n(0) = \displaystyle\int_0^1 B_n'(t)\ \mathrm{d}t = n\int_0^1 B_{n-1}(t)\ \mathrm{d}t = 0$ (car $n-1 \geq 1$).
13. *Symétrie*

    On note $A_n = (-1)^n B_n(1-\mathrm{X})$. On va montrer que (A_n) est une suite de polynômes de Bernoulli. L'unicité admise d'une telle suite donnera le résultat attendu.
    - Les A_n sont des polynômes réels ;
    - $A_0 = B_0 = 1$;
    - $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $A_n' = (-1)^n(-1)B_n'(1-\mathrm{X}) = (-1)^{n-1}nB_{n-1}(1-\mathrm{X}) = nA_{n-1}$;
    - $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_0^1 A_n(t)\ \mathrm{d}t = (-1)^n \int_0^1 B_n(1-t)\ \mathrm{d}t \overset{u=1-t}{=} (-1)^n \int_0^1 B_n(u)\ \mathrm{d}u = 0$.
14. *Développement en série de Fourier*

    Soit k un entier naturel. La restriction de g_k à $[0, 2\pi[$ est continue. Comme $B_{2k}(0) = B_{2k}(1)$ (même pour $k = 0$) et que B_{2k} est continue, $g_k(x) \xrightarrow[x \to 2\pi^-]{} B_{2k}(1) = B_{2k}(0) = g_k(2\pi)$. On en déduit que g_k est continue en 2π et, par périodicité, sur $\mathbb{R}$.

    De plus, la restriction de g_k à $[0, 2\pi]$ est l'application de classe $\mathcal{C}^1$: $x \mapsto B_{2k}\left(\dfrac{x}{2\pi}\right)$, donc g_k est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux.

    D'après le théorème de convergence normale, la série de Fourier de g_k converge normalement sur $\mathbb{R}$ et sa somme est g_k. Il reste à montrer que la fonction g_k est paire pour obtenir l'existence d'une suite de réels $(a_n(k))_{n\geq 0}$ telle que, pour tout réel x, on ait : $g_k(x) = \dfrac{a_0(k)}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(k)\cos(nx)$.

    $\forall x \in [0, \pi]$, $g_k(-x) = g_k(2\pi - x) \overset{2\pi - x \in [0, 2\pi]}{=} B_{2k}\left(\dfrac{2\pi - x}{2\pi}\right) = B_{2k}\left(1 - \dfrac{x}{2\pi}\right) \overset{13.}{=} B_{2k}\left(\dfrac{x}{2\pi}\right) \overset{x\in[0,2\pi]}{=} g_k(x)$. Par périodicité, la fonction g_k est paire.

    L'unicité est hors de portée d'un taupin.
15. *Expression des coefficients*
    (a) *Relation de récurrence*

$$\begin{aligned}
\pi a_n(k) &= \int_0^{2\pi} g_k(x)\cos(nx)\ \mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} B_{2k}\left(\frac{x}{2\pi}\right)\cos(nx)\ \mathrm{d}x \\
&\overset{\text{I.P.P.}}{=} \left[B_{2k}\left(\frac{x}{2\pi}\right)\frac{\sin(nx)}{n}\right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \frac{B_{2k}'\left(\frac{x}{2\pi}\right)}{2\pi}\frac{\sin(nx)}{n}\ \mathrm{d}x = -\frac{k}{n\pi}\int_0^{2\pi} B_{2k-1}\left(\frac{x}{2\pi}\right)\sin(nx)\ \mathrm{d}x \\
&\overset{\text{I.P.P.}}{=} \frac{k}{n\pi}\left[B_{2k-1}\left(\frac{x}{2\pi}\right)\frac{\cos(nx)}{n}\right]_0^{2\pi} - \frac{k}{n\pi}\int_0^{2\pi} \frac{B_{2k-1}'\left(\frac{x}{2\pi}\right)}{2\pi}\frac{\cos(nx)}{n}\ \mathrm{d}x \\
&= \frac{k}{n^2\pi}\Big(B_{2k-1}(1) - B_{2k-1}(0)\Big) - \frac{k(2k-1)}{2n^2\pi^2}\int_0^{2\pi} B_{2k-2}\left(\frac{x}{2\pi}\right)\cos(nx)\ \mathrm{d}x \\
&= \frac{k}{n^2\pi}\Big(B_{2k-1}(1) - B_{2k-1}(0)\Big) - \frac{(2k)(2k-1)}{(2n\pi)^2}.\pi a_n(k-1)
\end{aligned}$$

    (b) $a_n(0) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos(nx)\ \mathrm{d}x = 0$ car $n \geq 1$.

    Donc $a_n(1) = \dfrac{1}{(n\pi)^2}\Big(B_1(1) - B_1(0)\Big) - \dfrac{2}{(2n\pi)^2}.\pi a_n(0) = \dfrac{1}{(n\pi)^2}$.

(c) Pour $k \geq 2$, la formule du (a) devient $a_n(k) = -\dfrac{(2k)(2k-1)}{(2n\pi)^2} a_n(k-1)$. Donc

$$\begin{aligned} a_n(k) &= \left(-\frac{(2k)(2k-1)}{(2n\pi)^2}\right).\left(-\frac{(2k-2)(2k-3)}{(2n\pi)^2}\right).\dots.\left(-\frac{(4)(3)}{(2n\pi)^2}\right) a_n(1) = (-1)^{k-1}\frac{(2k)!}{2(2n\pi)^{2(k-1)}(n\pi)^2} \\ &= (-1)^{k-1}\frac{(2k)!}{2^{2k-1}(n\pi)^{2k}}. \end{aligned}$$

16. *Conclusion*

En appliquant l'égalité de la question 14. pour $x = 0$, on obtient

$b_{2k} = g_k(0) = \dfrac{a_0(k)}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{k-1}\frac{(2k)!}{2^{2k-1}(n\pi)^{2k}} = \frac{a_0(k)}{2} + (-1)^{k-1}\frac{(2k)!}{2^{2k-1}(\pi)^{2k}}\zeta(2k)$.

Or $a_0(k) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} g_k(x)\ \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} B_{2k}\left(\frac{x}{2\pi}\right)\ \mathrm{d}x = 2\int_0^1 B_{2k}(t)\ \mathrm{d}t = 0$ pour $k \geq 1$.

Finalement $b_{2k} = (-1)^{k-1}\dfrac{(2k)!}{2^{2k-1}(\pi)^{2k}}\zeta(2k)$.

17. *Calcul effectif des b_n*

(a) Par récurrence, on vérifie que B_n est de degré n.

D'après la formule de Taylor pour les polynômes, $B_n(\mathrm{X}) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{B_n^{(k)}(0)}{k!}\mathrm{X}^k$.

Par récurrence, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $B_n^{(k)} = n(n-1)\dots(n-k+1)B_{n-k} = \dfrac{n!}{(n-k)!}B_{n-k}$.

Donc $B_n(\mathrm{X}) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{n!B_{n-k}(0)}{(n-k)!k!}\mathrm{X}^k = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}b_{n-k}\mathrm{X}^k$.

(b) Pour $n \geq 2$, $b_n = B_n(0) = B_n(1) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}b_{n-k}$, donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}b_{n-k} = 0$.

On en déduit : $b_{n-1} = -\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}b_{n-k} = -\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n}{k}b_k$.

Finalement, pour tout $n \geq 1$: $b_n = -\dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n+1}{k}b_k$.

Programme Maple de calcul du coefficient b_p :

```
bernoulli :=proc(p)
local bern,n,binome;
if p=0 then 1
else
    binome :=[1,1,seq(0,i=1..p)];
    bern[0] :=1;
    for n from 1 to p do
       for i from n+1 downto 1 do binome[i] :=binome[i-1]+binome[i] od;
       bern[n] :=-sum(binome[i]*bern[i],i=0..n-1)/(n+1);
   od;
fi;
bern(p);
end;
```

La variable bern représente une liste indexée de 0 à p contenant les nombres de Bernoulli et binome une liste indexée de 0 à $p+1$ contenant, au début de l'étape n, les coefficients du binôme $\dbinom{n-2}{k}$. De telles listes n'existent pas : il conviendrait de décaler les indices d'une unité pour tester le programme.

Fin du corrigé