Correction HEC III 2007
Voie économique

La correction comporte 19 pages.

Exercice 1

1. Par définition λ est une valeur propre de t si et seulement si λ est une valeur propre de T. Et

$$\begin{aligned}\lambda \text{ est une valeur propre de } T &\iff T-\lambda I_3 \text{ est non inversible}\\ &\iff T'_\lambda \text{ une réduite de Gauss de } T-\lambda I_3 \text{ est non inversible}\end{aligned}$$

Nous avons :

$$\begin{aligned}T-\lambda I_3 &= \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 1\\ 0 & 1-\lambda & 0\\ 0 & 1 & -\lambda\end{pmatrix} \quad L_2 \leftrightarrow L_3\\ &\sim \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 1\\ 0 & 1 & -\lambda\\ 0 & 1-\lambda & 0\end{pmatrix} \quad L_3 \longleftarrow L_3-(1-\lambda)L_2\\ &\sim \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 1\\ 0 & 1 & -\lambda\\ 0 & 0 & \lambda(1-\lambda)\end{pmatrix}\end{aligned}$$

La réduite de Gauss obtenue de la matrice $T-\lambda I_3$ étant non inversible si et seulement si $\lambda=0$ ou $\lambda=1$, alors :

$$\boxed{sp(T)=sp(t)=\{0,1\}}$$

Déterminons $E_0(t)$ l'espace propre de t associé à la valeur propre 0, avec :

$$\begin{aligned}E_0(t) &= \left\{v\in\mathbb{R}^3 \mid t(v)=0_{\mathbb{R}^3}\right\}\\ &= \ker t\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}E_0(t) &= \left\{v=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3 \mid x_1+x_2+x_3=0 \text{ et } x_2=0\right\}\\ &= \left\{v=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3 \mid x_1+x_3=0 \text{ et } x_2=0\right\}\\ &= \boxed{\mathrm{Vect}((1,0,-1))}\end{aligned}$$

Comme le triplet $(1,0,-1)$ est non nul, il constitue une base de $E_0(t)$ qui est donc de dimension 1. D'autre part :

$$\begin{aligned}E_1(t) &= \left\{v\in\mathbb{R}^3 \mid t(v)=v\right\}\\ &= \ker\left(t-id_{\mathbb{R}^{2n+1}}\right)\\ &= \left\{v=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3 \mid x_2+x_3=0 \text{ et } x_2-x_3=0\right\}\\ &= \left\{v=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3 \mid x_2=x_3=0\right\}\\ &= \boxed{\mathrm{Vect}((1,0,0))}\end{aligned}$$

Comme le triplet $(1,0,0)$ est non nul, il constitue une base de $E_1(t)$ qui est aussi de dimension 1. Du fait que $\dim\mathbb{R}^3=3$ et que :

$$\dim E_0(t)+\dim E_1(t)=2\neq 3$$

$$\boxed{\text{l'endomorphisme } t \text{ n'est pas diagonalisable}}$$

Enfin comme 0 appartient au spectre de t :

$$\boxed{\text{l'endomorphisme } t \text{ n'est pas bijectif}}$$

2. Soit t l'endomorphisme de $\mathbb{R}^{2n+1}$ défini par :

- $\forall i \in [|1, 2n+1|] - \{n+1\} : t(e_i) = e_1$;
- $t(e_{n+1}) = \displaystyle\sum_{k=1}^{2n+1} e_k$.

(a) Soit T la matrice de t dans la base canonique $\mathcal{B}_c = (e_1, \ldots, e_n)$ alors :

$$\boxed{T = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & \vdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}}$$

(b) Par définition :

$$\begin{aligned} rg(t) &= \dim \mathrm{Im}(t) \\ &= \dim(\mathrm{Vect}(t(e_1), t(e_2), \ldots, t(e_{2n+1}))) \\ &= \dim(\mathrm{Vect}(t(e_1), t(e_{n+1}))) \\ &= \boxed{2} \text{ car les vecteurs } t(e_1) \text{ et } t(e_{n+1}) \text{ sont non proportionnels} \end{aligned}$$

(c) Comme T présente de nombreuses colonnes identiques, elle n'est pas inversible et 0 est valeur propre de T donc de t. Le théorème du rang affirmant que :

$$\dim \mathbb{R}^{2n+1} = \dim \ker t + rg(t)$$

nous pouvons conclure que :

$$\begin{aligned} \dim \ker t &= 2n+1-2 \\ &= 2n-1 \end{aligned}$$

Et comme par définition $\ker t = E_0(t)$, alors :

$$\boxed{\dim E_0(t) = 2n-1}$$

Déterminons une base de $E_0(t)$:

$$\begin{aligned} & E_0(t) = \left\{(x_1, \ldots, x_{2n+1}) \in \mathbb{R}^{2n+1} \mid t(x_1, \ldots, x_{2n+1}) = 0_{\mathbb{R}^{2n+1}}\right\} \\ = & \left\{(x_1, \ldots, x_{2n+1}) \in \mathbb{R}^{2n+1} \mid \sum_{k=1}^{2n+1} x_k = 0 \text{ et } x_{n+1} = 0\right\} \\ = & \left\{ \begin{array}{c} (-x_2 - x_3 - \cdots - x_n - x_{n+2} - \cdots - x_{2n+1}, x_2, \ldots, x_n, 0, x_{n+2}, \ldots, x_{2n+1}) \\ \mid (x_2, \ldots, x_n, x_{n+2}, \ldots, x_{2n+1}) \in \mathbb{R}^{2n-1} \end{array} \right\} \\ = & \left\{ \begin{array}{c} x_2(-1, 1, 0 \ldots, 0) + x_3(-1, 0, 1, 0, \ldots, 0) + \cdots + x_{2n+1}(-1, 0, \ldots, 0, 1) \\ \mid (x_2, \ldots, x_n, x_{n+2}, \ldots, x_{2n+1}) \in \mathbb{R}^{2n-1} \end{array} \right\} \\ = & \ \mathrm{Vect}\left(\underbrace{(-1, 1, 0 \ldots, 0)}_{v_1}, \underbrace{(-1, 0, 1, 0, \ldots, 0)}_{v_2}, \ldots, \underbrace{(-1, 0, \ldots, 0, 1)}_{v_{2n-1}}\right) \end{aligned}$$

On vérifie sans peine que les vecteurs $v_1, v_2, \ldots, v_{2n-1}$ sont libres car la combinaison linéaire nulle de ceux-ci $a_1 v_1 + \cdots + a_{2n-1} v_{2n-1} = 0_{\mathbb{R}^{2n-1}}$ donne le système :

$$\begin{cases} -a_1 - a_2 - \cdots - a_{2n-1} = 0 \\ a_1 = 0 \\ a_2 = 0 \\ \vdots \\ a_n = 0 \\ 0 = 0 \\ a_{n+2} = 0 \\ \vdots \\ a_{2n-1} = 0 \end{cases}$$

qui admet clairement comme unique solution, la solution nulle. Donc une base de $E_0(t)$ est :

$$\boxed{((-1, 1, 0 \ldots, 0), (-1, 0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, (-1, 0, \ldots, 0, 1))}$$

3. Cette question est classique présentant une inclusion "naturelle", en effet : soit $v \in \operatorname{Im}(t \circ t)$ alors il existe un vecteur e de $\mathbb{R}^{2n+1}$ tel que $y = (t \circ t)(e)$ ce que l'on peut écrire sous la forme qu'il existe un vecteur e de $\mathbb{R}^{2n+1}$ tel que $y = t(t(e))$ avec $t(e) \in \mathbb{R}^{2n+1}$ puisque t est un endomorphisme. Alors en posant $t(e) = f$ nous pouvons écrire que pour tout vecteur y de $\operatorname{Im}(t \circ t)$ il existe un vecteur f de $\mathbb{R}^{2n+1}$ tel que $y = t(f)$. Alors y appartient à $\operatorname{Im} t$ et nous avons bien l'inclusion :

$$\boxed{\operatorname{Im}(t \circ t) \subset \operatorname{Im} t}$$

4. Soit $\widetilde{t}$ l'endomorphisme défini sur $\operatorname{Im} t$ par :

$$\forall x \in \operatorname{Im}(t), \quad \widetilde{t}(x) = t(x)$$

La famille $\mathcal{B} = \left(e_1, \sum_{k=1}^{2n+1} e_k\right)$ constitue une base de $\operatorname{Im} t$ car tout d'abord elle est constituée de deux vecteurs de $\operatorname{Im} t$ puisque nous savons vu que $\operatorname{Im} t = \operatorname{Vect}(t(e_1), t(e_{n+1}))$ avec $t(e_1) = e_1$ et $t(e_{n+1}) = \sum_{k=1}^{2n+1} e_k$ vecteurs qui sont non proportionnels et au nombre de deux, (la dimension de $\operatorname{Im} t$), dans ce cas nous pouvons affirmer que :

$$\boxed{\mathcal{B} = \left(e_1, \sum_{k=1}^{2n+1} e_k\right) \text{ constitue une base de } \operatorname{Im} t}$$

et puisque :

$$\begin{aligned} \widetilde{t}(e_1) &= t(e_1) \\ &= e_1 \\ \text{et } \widetilde{t}\left(\sum_{k=1}^{2n+1} e_k\right) &= t\left(\sum_{k=1}^{2n+1} e_k\right) \\ &= \sum_{k=1}^{2n+1} t(e_k) \\ &= 2ne_1 + \sum_{k=1}^{2n+1} e_k \end{aligned}$$

alors :

$$\boxed{\operatorname{Mat}(\widetilde{t}, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

(a) Soit λ une valeur propre non nulle de t et x un vecteur propre associé à λ, alors par définition nous avons $f(x) = \lambda x$ ce qui entraîne que :

$$f\left(\frac{x}{\lambda}\right) = x \text{ puisque } \lambda \neq 0$$

ainsi il existe bien un vecteur de $\mathbb{R}^{2n+1}$ noté u égal à $\dfrac{x}{\lambda}$ tel que $f(u) = x$. Ainsi nous avons l'implication :

$$\boxed{x \in E_\lambda(t) \Longrightarrow x \in \operatorname{Im} t} \quad (1)$$

(b) Tout d'abord rappelons que 0 appartient clairement à $sp(t)$ puisque la matrice de t est non inversible avec $\dim E_0(t) = 2n-1$. De ce fait il ne nous reste au maximum que deux valeurs propres à chercher car (1) entraîne que :

$$\begin{aligned} & \dim E_\lambda(t) \leq \dim \operatorname{Im} t \\ \Longrightarrow\quad & 1 \leq \dim E_\lambda(t) \leq 2 \end{aligned}$$

Comme la dimension de $\operatorname{Im} t$ vaut 2, soit nous avons à chercher un sous-espace propre de dimension au plus égale à deux, soit deux sous-espaces propres de dimension 1. Or comme $t(e_1) = e_1$ et $t\left(\sum_{k=1}^{2n+1} e_k\right) \neq \sum_{k=1}^{2n+1} e_k$, $t\left(\sum_{k=1}^{2n+1} e_k\right) \neq e_1$, t n'admet que 1 comme valeur propre non nulle en plus de 0 avec :

$$\begin{aligned} \dim E_1(t) &= \dim \operatorname{Vect}(e_1) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{sp(t) = \{0, 1\}}$$

avec :

$$\begin{aligned} \dim E_0(t) + \dim E_1(t) &= 2n - 1 + 1 \\ &= 2n \\ &< 2n + 1 \text{ (c'est } \dim \mathbb{R}^{2n+1}) \end{aligned}$$

donc :

$$\boxed{t \text{ n'est pas diagonalisable}}$$

Problème

Partie I

1. _

(a) Considérons la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \dfrac{e^{-|x|}}{2}$. Nous constatons qu'elle paire car :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad -x \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad g(-x) = \frac{e^{-|-x|}}{2} = g(x)$$

Ainsi les intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} g$ et $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} g$ sont de même nature et égales en cas de convergence, d'après le cours. Or :

$$\begin{aligned} \lim_{a \to +\infty} \int_0^a \frac{e^{-x}}{2} dx &= \lim_{a \to +\infty} \frac{1}{2} \left[-e^{-x}\right]_0^a \\ &= \lim_{a \to +\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-a}\right) \\ &= \frac{1}{2} \text{ car } \lim_{a \to +\infty} e^{-a} = 0 \end{aligned}$$

Comme la limite existe et est finie, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{2} dx$ converge et vaut $\frac{1}{2}$. Cela entraîne comme dit précédemment que $\int_{-\infty}^0 \frac{e^{-x}}{2} dx$ converge aussi et vaut $\frac{1}{2}$.

Conclusion : $\int_{-\infty}^{+\infty} g$ converge et vaut par la *relation de Chasles* :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} g &= \int_{-\infty}^{0} g + \int_{0}^{+\infty} g \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\ &= \boxed{1} \end{aligned}$$

(b) Nous constatons pour commencer que $\mathcal{D}_g = \mathbb{R}$. D'autre part g est continue sur $\mathbb{R}$ comme produit d'une fonction constante et d'une fonction composée de $x \longmapsto -|x|$, continue sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, et de exp continue sur $\mathbb{R}$. La positivité de g ne pose aucun problème et le résultat de la première question s'ajoutant concernant la convergence et la valeur de $\int_{-\infty}^{+\infty} g$, nous pouvons conclure que :

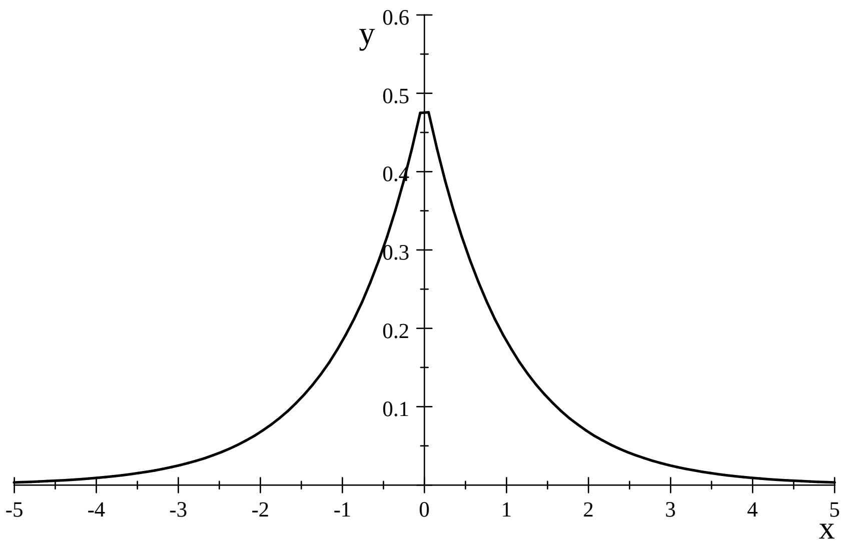
$$\boxed{g \text{ est une densité de probabilité}}$$

2. Comme g est paire nous ne l'étudierons que sur $\mathcal{D}_g \cap \mathbb{R}_+ = \mathbb{R}_+$ et sur cet ensemble $g(x)$ s'écrit $\frac{e^{-x}}{2}$.
Au passage, nous n'oublierons pas notre culture nous faisant affirmer que $x \longmapsto |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ en tant que fonction composée de $x \longmapsto -x$, dérivable sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans $\mathbb{R}_-$, et de exp dérivable sur $\mathbb{R}_-$. Avec :

$$\forall x \geq 0, \quad g'(x) = \frac{-e^{-x}}{2} < 0$$

Enfin $\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$ et $g(0) = \frac{1}{2}$ donc :

x	0		$+\infty$
$g'(x)$	$-\frac{1}{2}$	$-$	
$g(x)$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0



3. _

(a) Pour montrer que Y admet un moment d'ordre $r \in \mathbb{N}$, il suffit de démontrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^r \frac{e^{-x}}{2} dx$ est convergente car si l'exposant r est pair, la fonction $x \longmapsto x^r \dfrac{e^{-|x|}}{2}$ est paire et si r est impair, elle est impaire. Alors, comme dans la question **I.1.a** les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^r \frac{e^{-|x|}}{2} dx$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} x^r \frac{e^{-|x|}}{2} dx$ sont de même nature et, soit égales, soit opposées, en cas de convergence. Or :

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 \times \frac{x^r e^{-x}}{2} = 0$$

par croissances comparées (exponentielle-puissance), ainsi :

$$\frac{x^r e^{-x}}{2} = \underset{+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

avec $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ qui est une intégrale convergente en tant qu'*intégrale de Riemann* de paramètre $2 > 1$. Alors par *critère de négligeabilité appliqué aux fonctions positives*, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^r \frac{e^{-x}}{2} dx$ converge aussi. Enfin comme $\displaystyle\int_0^{1} x^r \frac{e^{-x}}{2} dx$ converge aussi par continuité de l'intégrande sur le segment $[0,1]$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^r \frac{e^{-x}}{2} dx$ converge et par parité $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} x^r \frac{e^{x}}{2} dx$ converge aussi.

Conclusion :

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} x^r \frac{e^{-|x|}}{2} dx \text{ est convergente et } m_r(Y) \text{ existe}}$$

(b) _

- Si $r \in 2\mathbb{N}+1$ (r est impair) alors :

$$m_r(Y) = 0 \tag{2}$$

- Si $r = 0$:

$$m_0(Y) = 1 \text{ (intégrale de la densité)} \tag{3}$$

- Si $r = 2p$ où $p \in \mathbb{N}^*$ (r est pair) alors :

$$\begin{aligned} m_r(Y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2p} \frac{e^{-|x|}}{2} dx \\ &= \frac{2}{2}\int_0^{+\infty} x^{2p} e^{-x} dx \\ &= \int_0^{+\infty} x^{2p} e^{-x} dx \\ &= \lim_{a\to+\infty} \int_0^{a} x^{2p} e^{-x} dx \end{aligned}$$

A ce niveau-là, introduisons pour tout $a \in \mathbb{R}_+$, $I_{2p}(a) = \displaystyle\int_0^{a} x^{2p} e^{-x} dx$. Effectuons une *intégration par parties* en posant :

$$\begin{array}{lcl} u(x) = x^{2p} & \Longrightarrow & u'(x) = 2px^{2p-1} \\ v(x) = -e^{-x} & \Longleftarrow & v'(x) = e^{-x} \end{array}$$

avec u et v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,a]$ avec $a \geq 0$. Alors :

$$\begin{aligned} I_{2p}(a) &= \left[-x^{2p}e^{-x}\right]_0^a + 2p\int_0^a x^{2p-1}e^{-x}dx \\ &= -a^{2p}e^{-a} + 2p\int_0^a x^{2p-1}e^{-x}dx \\ &= -a^{2p}e^{-a} + 2pI_{2p-1}(a) \end{aligned}$$

et par passage à la limite quand p tend vers $+\infty$, la convergence des intégrales en jeu nous permet d'écrire que :

$$I_{2p} = 2pI_{2p-1}$$

et par itérations successives :

$$\begin{aligned} I_{2p} &= 2p(2p-1)\times\cdots\times 2\times\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx \\ &= (2p)!\times\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx \\ &= (2p)!\times\left(\lim_{a\to+\infty}\int_0^a xe^{-x}dx\right) \\ &= (2p)!\times\left(\lim_{a\to+\infty}\left(\left[-xe^{-x}\right]_0^a + \int_0^a e^{-x}dx\right)\right) \\ &= (2p)!\times\left(\lim_{a\to+\infty}\left(\left[-ae^{-a}\right]_0^a + 1 - e^{-a}\right)\right) \\ &= (2p)! \end{aligned} \tag{4}$$

Conclusion : selon (2), (3) et (4)

$$\boxed{m_r(Y) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad r\in 2\mathbb{N}+1 \\ r! & \text{si} \quad r\in 2\mathbb{N} \end{cases}} \tag{5}$$

Selon (5) :

$$\boxed{\mathbf{E}(Y) = 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{V}(Y) = 2}$$

4. _

(a) Soit G la fonction de répartition de Y. Elle est définie par :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad G(x) = \mathbf{P}([G\leq x])$$

- Si $x \leq 0$:

$$\begin{aligned} G(x) &= \int_{-\infty}^x \frac{e^t}{2}dx \\ &= \lim_{a\to-\infty}\int_a^x \frac{e^t}{2}dx \\ &= \lim_{a\to-\infty}\frac{1}{2}\left(e^x - e^a\right) \\ &= \frac{e^x}{2} \end{aligned} \tag{6}$$

- Si $x > 0$:

$$\begin{aligned} G(x) &= G(0) + \int_0^x \frac{e^{-t}}{2}dx \\ &= \frac{1}{2} + \int_0^x \frac{e^{-t}}{2}dx \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(-e^{-x}+1\right) \\ &= 1 - \frac{e^{-x}}{2} \end{aligned} \tag{7}$$

Conclusion : selon (6) et (7)

$$\boxed{G(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x}{2} & \text{si} \quad x \leq 0 \\ 1 - \dfrac{e^{-x}}{2} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}} \tag{8}$$

(b) Nous avons :

- G est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que somme de telles fonctions,
- G est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_-$ en tant que fonction proportionnelle à la fonction exponentielle,
- de plus $\lim\limits_{x\to 0^-} G(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} G(x) = G(0) = \dfrac{1}{2}$ donc G est continue en 0 donc sur $\mathbb{R}$.
- $\forall x > 0$, $G'(x) = \dfrac{e^{-x}}{2} > 0$,
- $\forall x \leq 0$, $G'(x) = \dfrac{e^x}{2} > 0$

Conclusion : G étant continue et strictement monotone sur $\mathbb{R}$,

$$\boxed{G \text{ est une bijection de } \mathbb{R} \text{ vers } G(\mathbb{R}) = \left] \lim_{-\infty} G \quad , \quad \lim_{+\infty} G \right[=]0,1[}$$

(c) Comme $\dfrac{1}{2} \in G(\mathbb{R})$, avec G bijective :

$$\boxed{\text{il existe un unique réel } x \text{ tel que } G(x) = \frac{1}{2}}$$

(d) Nous avons $\forall x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$ avec :

- si $x \leq 0$, $-x \geq 0$:

$$\begin{aligned} G(-x)(1 - G(-x)) &= \left(1 - \frac{e^x}{2}\right)\left(1 - 1 + \frac{e^x}{2}\right) \\ &= \left(1 - \frac{e^x}{2}\right)\left(\frac{e^x}{2}\right) \\ &= (1 - G(x))\,G(x) \end{aligned} \tag{9}$$

- si $x > 0$, $-x < 0$:

$$\begin{aligned} G(-x)(1 - G(-x)) &= \left(\frac{e^{-x}}{2}\right)\left(1 - \frac{e^{-x}}{2}\right) \\ &= (1 - G(x))\,G(x) \end{aligned} \tag{10}$$

Conclusion : selon (9) et (10)

$$\boxed{G \text{ est paire}}$$

5. _

(a) Nous avons les équivalences :

$$\begin{aligned} & \forall y \leq 0, \quad x = \frac{e^y}{2} \\ \iff & \forall x \in \left]0, \frac{1}{2}\right], \quad 2x = e^y \\ \iff & \forall x \in \left]0, \frac{1}{2}\right], \quad y = \ln(2x) \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned}
& \forall y \geq 0, \quad x = 1 - \frac{e^{-y}}{2} \\
\iff & \forall x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right[, \quad 2x = 2 - e^{-y} \\
\iff & \forall x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right[, \quad e^{-y} = 2 - 2x \\
\iff & \forall x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right[, \quad y = -\ln(2 - 2x) \qquad (12)
\end{aligned}$$

Conclusion : selon (11) et (12)

$$\boxed{G^{-1}(x) = \begin{cases} \ln(2x) & \text{si} \quad 0 < x \leq \frac{1}{2} \\ -\ln(2(1-x)) & \text{si} \quad \frac{1}{2} \leq x < 1 \end{cases}}$$

(b) Voici la fonction :

```
function laplace:real;
u:  real; begin
u:=random;
if (u < 0.5) then
laplace:=ln(2*u)
else
laplace = -ln(2*(1-u))) end;
```

Explications : on tire au sort une proba (u, comprise entre 0 et 1). Par la fonction réciproque $G-1$, on obtient le point où l'on a pris la mesure de la proba.

6. Considérons pour tout entier non nul n la fonction g_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{aligned}
g_n(x) &= g(x)\left(1 + xe^{-n|x|}\right) \\
&= \frac{e^{-|x|}}{2}\left(1 + xe^{-n|x|}\right)
\end{aligned}$$

g_n définit bien une densité car :

- g_n est continue sur comme produit de telles fonctions ($x \longmapsto xe^{-n|x|}$ étant continue sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$),
- g_n est clairement positive sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions positives,
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g_n$ est convergente car $g_n(x) = g(x)\left(1 + xe^{-n|x|}\right)$ avec :
  - $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,dx$ est convergente puisque nous savons que g est une densité,
  - $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,xe^{-n|x|}dx$ est convergente, car du fait l'imparité de l'intégrande il suffit d'étudier la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-(n+1)x}}{2}dx$, or :

$$\lim_{x \to +\infty} x^2 \times \frac{xe^{-(n+1)x}}{2} = 0$$

par croissances comparées (exponentielle-puissance), ainsi :

$$\frac{xe^{-(n+1)x}}{2} = \underset{+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

avec $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ qui est une intégrale convergente en tant qu'*intégrale de Riemann* de paramètre $2 > 1$. Alors par *critère de négligeabilité appliqué aux fonctions positives*, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{xe^{-(n+1)x}}{2}dx$ converge aussi. Et comme $\displaystyle\int_0^1 \frac{xe^{-(n+1)x}}{2}dx$ converge aussi par continuité de l'intégrande sur le segment $[0,1]$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-(n+1)x}}{2}dx$ converge et par imparité $\displaystyle\int_{-\infty}^0 \frac{xe^{(n+1)x}}{2}dx$ converge aussi. Ainsi :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(x)\, xe^{-n|x|}}{2}dx \text{ est convergente et vaut } 0$$

$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g_n$ est convergente et vaut par *linéarité de l'intégrale* :

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} g_n(x)\, dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\, dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(x)\, xe^{-n|x|}}{2}dx \\
&= 1+0 \\
&= 1
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{g_n \text{ est bien une densité}}$$

7. _

(a) Nous avons pour tout réel x :

$$\begin{aligned}
|G_n(x) - G(x)| &= \left| \int_{-\infty}^{x} g_n(t)\, dt - \int_{-\infty}^{x} g(t)\, dt \right| \\
&\leq \int_{-\infty}^{x} |g_n(t) - g(t)|\, dt \\
&\leq \int_{-\infty}^{x} \left| g(t)\left(1 + te^{-n|t|}\right) - g(t) \right| dt \\
&\leq \int_{-\infty}^{x} \left| g(t)\, te^{-n|t|} \right| dt \\
&\leq \int_{-\infty}^{x} g(t) \left| te^{-n|t|} \right| dt
\end{aligned}$$

A ce niveau étudions rapidement la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\varphi(u) = |u|\, e^{-|u|} = \begin{cases} ue^{-u} & \text{si} \quad u \geq 0 \\ -ue^{u} & \text{si} \quad u \leq 0 \end{cases}$$

- si $u \geq 0$, $\varphi'(u) = (1-u)\, e^{-u}$ et

u	0		1		$+\infty$
$\varphi'(u)$		$+$	0	$-$	
$\varphi(u)$		$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	

  ainsi pour tout réel u positif, nous avons

$$\varphi(u) \leq e^{-1} \tag{13}$$

- si $u \leq 0$, $\varphi'(u) = -(1+u)\, e^{u}$ et

u	$-\infty$		-1		0
$\varphi'(u)$		$+$	0	$-$	
$\varphi(u)$		$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	

  ainsi pour tout réel u négatif, nous avons

$$\varphi(u) \leq e^{-1} \tag{14}$$

Selon (13) et (14) :

$$\forall u \in \mathbb{R}, \quad \varphi(u) \leq e^{-1}$$

En posant maintenant $u = nt$, le résultat précédent permet d'écrire que :

$$\begin{array}{ll} & \forall t \in]-\infty, x], \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \left|nte^{-n|t|}\right| = |nt|\, e^{-|nt|} \leq e^{-1} \\ \Longrightarrow & \forall t \in]-\infty, x], \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \left|te^{-n|t|}\right| \leq \dfrac{1}{ne} \end{array}$$

par conséquent :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \ |G_n(x) - G(x)| &\leq \int_{-\infty}^{x} g(t) \left|te^{-n|t|}\right| dt \\ &\leq \frac{1}{ne} \int_{-\infty}^{x} g(t)\, dt \\ &\leq \frac{1}{ne} G(x) \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad |G_n(x) - G(x)| \leq \frac{1}{ne} G(x)}$$

(b) Par le *théorème d'encadrement*, nous obtenons pour tout réel x (en lequel G est continue) que $\lim_{n \to +\infty} |G_n(x) - G(x)| = 0$ puisque $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{ne} G(x) = 0$, alors d'après le cours :

$$\boxed{\text{la suite } (Y_n)_{n \geq 1} \text{ converge en loi vers une variable suivant la loi } \mathcal{L}(0)}$$

Partie II

1. _

(a) Soit X une variable suivant la loi $\mathcal{L}(\theta)$ de densité associée f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{e^{-|x-\theta|}}{2}$ et soit F sa fonction de répartition définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt$$

- si $x \leq \theta$ alors $-|x - \theta| = x - \theta$ et :

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^{x} \frac{e^{t-\theta}}{2} dt \\ &= \lim_{a \to -\infty} \left[\frac{e^{t-\theta}}{2}\right]_a^x \\ &= \frac{e^{x-\theta}}{2} \end{aligned} \tag{15}$$

- si $x > \theta$ alors $-|x - \theta| = -x + \theta$ et :

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^{\theta} f(t)\, dt + \int_{\theta}^{x} \frac{e^{-t+\theta}}{2} dt \\ &= F(\theta) + \left[-\frac{e^{-t+\theta}}{2}\right]_{\theta}^{x} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{e^{-x+\theta}}{2} \\ &= 1 - \frac{e^{-x+\theta}}{2} \end{aligned} \tag{16}$$

Selon (15) et (16) :

$$\boxed{F(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{x-\theta}}{2} & \text{si} \quad x\leq\theta\\ 1-\dfrac{e^{-x+\theta}}{2} & \text{si} \quad x>\theta\end{cases}} \tag{17}$$

(b) Tout d'abord, la variable aléatoire $X-\theta$ est à valeur dans $\mathbb{R}$ (car X l'est). Notons $F_{X-\theta}$ sa fonction de répartition définie par :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad F_{X-\theta}(x)=\mathbf{P}([X-\theta\leq x])$$

alors :

$$\begin{aligned}\forall x\in\mathbb{R},\ F_{X-\theta}(x) &= \mathbf{P}([X\leq x+\theta])\\ &= F(x+\theta)\end{aligned} \tag{18}$$

- si $x+\theta\leq\theta$ soit si $x\leq 0$:

$$\begin{aligned}F_{X-\theta}(x) &= \frac{e^{x+\theta-\theta}}{2}\\ &= \frac{e^{x}}{2}\end{aligned} \tag{19}$$

- si $x+\theta>\theta$ soit si $x>0$:

$$\begin{aligned}F_{X-\theta}(x) &= 1-\frac{e^{-(x+\theta)+\theta}}{2}\\ &= 1-\frac{e^{-x}}{2}\end{aligned} \tag{20}$$

Selon (19) et (20) :

$$F_{X-\theta}(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{x}}{2} & \text{si} \quad x\leq 0\\ \\ 1-\dfrac{e^{-x}}{2} & \text{si} \quad x>0\end{cases} \tag{21}$$

Selon (8) et (21) :

$$\boxed{X-\theta\hookrightarrow\mathcal{L}(0)}$$

(c) Comme la variable $X-\theta$ admet une espérance, il en de même de la variable X avec par propriétés élémentaires :

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(X) &= \mathbf{E}(X-\theta)+\theta\\ &= 0+\theta\\ &= \boxed{\theta}\\ \text{et } \mathbf{V}(X) &= \mathbf{V}(X-\theta)\\ &= \boxed{2}\end{aligned}$$

(d) Comme la densité d'une variable suivant la loi $\mathcal{L}(\theta)$ est strictement positive, nous pouvons conclure que la fonction de répartition F associée à cette variable est strictement monotone croissante, donc l'équation $F(x)=\dfrac{1}{2}$ n'admet qu'une seule solution. Comme $F(\theta)=\dfrac{1}{2}$ selon (17) nous pouvons écrire que :

$$\boxed{F(x)=\frac{1}{2}\Longleftrightarrow x=\theta}$$

2. _

(a) Comme les variables $X_1, \ldots, X_{2n+1}$ sont indépendantes par définition du fait qu'elles servent à constituer un $(2n+1)-$ échantillon, les événements $[X_i \leq x]$ sont indépendants pour tout $i \in [|1, 2n+1|]$ et pour x fixé. Ainsi les événements $[Z_i = 1]$ pour tout $i \in [|1, 2n+1|]$ sont indépendants, alors d'après le cours[1] les événements $[Z_i = \varepsilon]$ pour $\varepsilon \in \{0, 1\}$ et pour tout $i \in [|1, 2n+1|]$ restent indépendants, alors :

$$\forall (x_1, \ldots, x_{2n+1}) \in (\{0,1\})^{2n+1}, \quad \mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^{2n+1} [Z_i = x_i]\right) = \prod_{i=1}^{2n+1} \mathbf{P}([Z_i = x_i])$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{les variables } Z_i \text{ pour } i \in [|1, 2n+1|] \text{ sont indépendantes}}$$

(b) D'après le cours :

$$\begin{aligned} & S_{2n+1} \hookrightarrow \mathcal{B}(2n+1, \mathbf{P}([Z_1 = 1])) \\ \text{soit } & S_{2n+1} \hookrightarrow \mathcal{B}(2n+1, \mathbf{P}([X \leq x])) \\ \text{ou encore } & \boxed{S_{2n+1} \hookrightarrow \mathcal{B}(2n+1, F(x))} \end{aligned}$$

A nouveau d'après le cours :

$$\boxed{\mathbf{E}(S_{2n+1}) = (2n+1) F(x) \quad \text{et} \quad \mathbf{V}(S_{2n+1}) = (2n+1) F(x) (1 - F(x))}$$

3. _

(a) Calculons l'espérance de $\overline{X}_{2n+1}$ pour voir si cette variable est sans biais du paramètre θ. Cette première existe du fait que $\overline{X}_{2n+1}$ est une combinaison linéaire de variables X_i qui admettent chacune une espérance avec :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\left(\overline{X}_{2n+1}\right) &= \frac{1}{2n+1} \sum_{i=1}^{2n+1} \mathbf{E}(X_i) \\ &= \left(\frac{2n+1}{2n+1}\right) \mathbf{E}(X_1) \\ &= \mathbf{E}(X_1) \\ &= \boxed{\theta} \end{aligned}$$

(b) Comme nous venons de démontrer que la variable est sans biais, le risque quadratique de $\overline{X}_{2n+1}$ en θ est égal à la variance de $\overline{X}_{2n+1}$ qui existe car cette variable s'exprime comme combinaison linéaire de variables admettant chacune une variance, avec :

$$\begin{aligned} r_{\overline{X}_{2n+1}}(\theta) &= \mathbf{V}\left(\overline{X}_{2n+1}\right) \\ &= \frac{1}{(2n+1)^2} \sum_{i=1}^{2n+1} \mathbf{V}(X_i) \text{ par indépendance des variables } X_i \\ &= \frac{2n+1}{(2n+1)^2} \mathbf{V}(X_i) \\ &= \boxed{\frac{2}{2n+1}} \end{aligned}$$

Partie III

1. _

[1] On rappelle le théorème : *soit $(A_n)_{n \geq 1}$ une suite d'événements deux à deux indépendants (resp. mutuellement indépendants), alors il en est de même de la suite d'événements $(B_n)_{n \geq 1}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $B_n = A_n$ ou $\overline{A_n}$.*

(a) Pour faciliter la rédaction qui va suivre et pour élargir votre culture, sachez que la variable $\widehat{X}_{n+1}$ partageant en deux l'échantillon de variables aléatoires en deux parties égales (autant de variables en "amont" qu'en "aval"), une fois celles-ci rangées dans l'ordre croissant, s'appelle **médiane de l'échantillon**. Il est clair que dire que la médiane est inférieure ou égale à x équivaut à dire qu'il y a au moins $n+1$ variables $\widehat{X}_i$ inférieures ou égales à x ce qui équivaut encore à dire qu'il y a donc au moins $n+1$ variables Z_i égales à 1 ce qui se traduit par l'événement $[S_{2n+1} \geq n+1]$.
Conclusion :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad \left[\widehat{X}_{n+1} \leq x\right] = [S_{2n+1} \geq n+1]}$$

(b) $\widehat{F}_{n+1}$ la fonction de répartition de $\widehat{X}_{n+1}$ est définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \widehat{F}_{n+1}(x) = \mathbf{P}\left(\left[\widehat{X}_{n+1} \leq x\right]\right)$$

avec :

$$\begin{aligned}
&\forall x \in \mathbb{R}, \quad \widehat{F}_{n+1}(x) = \mathbf{P}([S_{2n+1} \geq n+1]) \\
&= \mathbf{P}\left(\biguplus_{k=n+1}^{2n+1}\left(\biguplus_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq 2n+1} [Z_{i_1}=1]\cap\ldots\cap[Z_{i_k}=1]\cap\left[Z_{i_{k+1}}=0\right]\cap\ldots\cap\left[Z_{i_{2n+1}}=0\right]\right)\right) \\
&= \sum_{k=n+1}^{2n+1}\mathbf{P}\left(\biguplus_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq 2n+1} [Z_{i_1}=1]\cap\ldots\cap[Z_{i_k}=1]\cap\left[Z_{i_{k+1}}=0\right]\cap\ldots\cap\left[Z_{i_{2n+1}}=0\right]\right) \\
&\text{par } \sigma-\text{additivité de } \mathbf{P} \\
&= \sum_{k=n+1}^{2n+1}\sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq 2n+1}\mathbf{P}\left([Z_{i_1}=1]\cap\ldots\cap[Z_{i_k}=1]\cap\left[Z_{i_{k+1}}=0\right]\cap\ldots\cap\left[Z_{i_{2n+1}}=0\right]\right) \\
&= \sum_{k=n+1}^{2n+1}\sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq 2n+1}\mathbf{P}([Z_{i_1}=1])\times\cdots\times\mathbf{P}([Z_{i_k}=1])\times\mathbf{P}\left(\left[Z_{i_{k+1}}=0\right]\right)\times\cdots\times\mathbf{P}\left(\left[Z_{i_{2n+1}}=0\right]\right) \\
&= \sum_{k=n+1}^{2n+1}\sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq 2n+1}(F(x))^k(1-F(x))^{2n+1-k} \\
&= \sum_{k=n+1}^{2n+1}(F(x))^k(1-F(x))^{2n+1-k}\sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq 2n+1}1 \\
&= \sum_{k=n+1}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}(F(x))^k(1-F(x))^{2n+1-k}
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad \widehat{F}_{n+1}(x) = \sum_{k=n+1}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}(F(x))^k(1-F(x))^{2n+1-k}}$$

2. _

(a) Pour tout j de $[|0, 2n|]$:

$$\begin{aligned}
(j+1)\binom{2n+1}{j+1} &= (j+1)\frac{(2n+1)!}{(j+1)!\,(2n-j)} \\
&= \frac{(2n+1)!}{j!\,(2n-j)} \\
&= (2n+1-j)\frac{(2n+1)!}{j!\,(2n+1-j)} \\
&= (2n+1-j)\binom{2n+1}{j}
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\forall j \in [|0, 2n|], \quad (j+1)\binom{2n+1}{j+1} = (2n+1-j)\binom{2n+1}{j}}$$

(b) Dérivons $\widehat{F}_{n+1}$ sur $\mathbb{R}$ pour déduire une densité $\widehat{f}_{n+1}$de $\widehat{X}_{n+1}$ (cette variable est effectivement à densité puisque elle représente l'une des variables X_i). En effet $\widehat{F}_{n+1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que combinaison linéaire de produits de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ (car n'oubliez pas que f est continue sur $\mathbb{R}$). Cela donne $\forall x \in \mathbb{R}$:

$\widehat{f}_{n+1}(x) = \widehat{F}'_{n+1}(x)$

$= \sum_{k=n+1}^{2n+1} k\binom{2n+1}{k}(F(x))^{k-1} f(x)(1-F(x))^{2n+1-k} - \sum_{k=n+1}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}(F(x))^k(2n+1-k)(1-F(x))^{2n-k} f(x)$

$= f(x)\left[\sum_{k=n+1}^{2n+1} k\binom{2n+1}{k}(F(x))^{k-1}(1-F(x))^{2n+1-k} - \sum_{k=n+1}^{2n+1}(2n+1-k)\binom{2n+1}{k}(F(x))^k(1-F(x))^{2n-k}\right]$

$= f(x)\left[\sum_{k=n+1}^{2n+1}\underbrace{k\binom{2n+1}{k}(F(x))^{k-1}(1-F(x))^{2n+1-k}}_{=a_k} - \sum_{k=n+1}^{2n+1}\underbrace{(k+1)\binom{2n+1}{k+1}(F(x))^k(1-F(x))^{2n-k}}_{=a_{k+1}}\right]$

selon la question **2.a**

$= f(x)\left[\sum_{k=n+1}^{2n+1} a_k - \sum_{k=n+1}^{2n+1} a_{k+1}\right]$

$= f(x)\left[\sum_{k=n+1}^{2n+1} a_k - \sum_{k=n+2}^{2n+2} a_k\right]$

$= f(x)\left[a_{n+1} - a_{2n+2}\right]$

$= f(x)\left[(n+1)\binom{2n+1}{n+1}(F(x))^n(1-F(x))^n - 0\right]$ car $\binom{2n+1}{2n+2} = 0$

$= f(x)(n+1)\left(\frac{2n+1}{n+1}\right)\binom{2n}{n}(F(x))^n(1-F(x))^n$

$= f(x)(2n+1)\binom{2n}{n}(F(x))^n(1-F(x))^n$

$= f(x)(2n+1)\frac{(2n)!}{(n!)^2}(F(x))^n(1-F(x))^n$

$= f(x)\frac{(2n+1)!}{(n!)^2}(F(x))^n(1-F(x))^n$

Conclusion :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad \widehat{f}_{n+1}(x) = f(x)\frac{(2n+1)!}{(n!)^2}(F(x))^n(1-F(x))^n}$$

(c) Commençons par déterminer $F_{\widehat{X}_{n+1}-\theta}$ la fonction de répartition de $\widehat{X}_{n+1}-\theta$. Elle est définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_{\widehat{X}_{n+1}-\theta}(x) = \mathbf{P}\left(\left[\widehat{X}_{n+1}-\theta \leq x\right]\right)$$

Nous avons :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \; F_{\widehat{X}_{n+1}-\theta}(x) = \mathbf{P}\left(\left[\widehat{X}_{n+1} \leq x+\theta\right]\right) = F_{\widehat{X}_{n+1}}(x+\theta)$$

et par dérivation de $F_{\widehat{X}_{n+1}-\theta}$ sur $\mathbb{R}$ nous obtenons une densité[2] de $\widehat{X}_{n+1}-\theta$ notée $\widehat{g}_{n+1}$ égale

[2] Variable obtenue à partir d'une transformation affine appliquée à $\widehat{X}_{n+1}$ qui est une variable à densité.

à :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R},\ \widehat{g}_{n+1}(x) &= F'_{\widehat{X}_{n+1}}(x+\theta) \\
&= \widehat{f}_{n+1}(x+\theta) \\
&= f(x+\theta)\frac{(2n+1)!}{(n!)^2}(F(x+\theta))^n(1-F(x+\theta))^n \\
&= \frac{e^{-|x+\theta-\theta|}}{2}\frac{(2n+1)!}{(n!)^2}(F(x+\theta))^n(1-F(x+\theta))^n \\
&= \frac{e^{-|x|}}{2}\frac{(2n+1)!}{(n!)^2}(G(x))^n(1-G(x))^n \\
&= g(x)\frac{(2n+1)!}{(n!)^2}(G(x))^n(1-G(x))^n
\end{aligned}$$

car n'oubliez pas que selon (18) : $\forall x \in \mathbb{R},\ F_{X-\theta}(x) = F(x+\theta)$ où $X-\theta \hookrightarrow \mathcal{L}(0)$ et l'on peut prendre $F_{X-\theta} = G$ selon la **partie I**.

(d) Montrons que l'espérance de $\widehat{X}_{n+1}-\theta$ est nulle pour répondre à la question. Tout d'abord la variable $\widehat{X}_{n+1}-\theta$ admet une espérance si et seulement si $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} xg(x)\frac{(2n+1)!}{(n!)^2}(G(x))^n(1-G(x))^n\,dx$ est absolument convergente. Or l'imparité de l'intégrande, du fait de la parité de $x \longmapsto (G(x))^n(1-G(x))^n$ selon la question **I.4.d** et de l'imparité de $x \longmapsto xg(x)$ nous fera réduire l'étude de la convergence à celle de $\displaystyle\int_{\mathbb{R}_+}\frac{xe^{-x}}{2}\frac{(2n+1)!}{(n!)^2}\left(1-\frac{e^{-x}}{2}\right)^n\left(\frac{e^{-x}}{2}\right)^n dx$. En cas de convergence la valeur de l'intégrale sera immédiate, elle vaudra 0. Or :

$$x^2\times\frac{xe^{-x}}{2}\frac{(2n+1)!}{(n!)^2}\left(1-\frac{e^{-x}}{2}\right)^n\left(\frac{e^{-x}}{2}\right)^n = \frac{x^3e^{-(n+1)x}}{2^{n+1}}\frac{(2n+1)!}{(n!)^2}\exp\left[n\ln\left(1-\frac{e^{-x}}{2}\right)\right]$$

avec :

$$\begin{aligned}
\exp\left[n\ln\left(1-\frac{e^{-x}}{2}\right)\right] &= \exp\left[n\left(-\frac{e^{-x}}{2}+o\left(e^{-x}\right)\right)\right] \\
&= \exp\left(-\frac{ne^{-x}}{2}\right)\exp\left(o\left(e^{-x}\right)\right) \\
&\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1
\end{aligned}$$

donc :

$$\exp\left[n\ln\left(1-\frac{e^{-x}}{2}\right)\right]\underset{x\to+\infty}{\sim} 1$$

et par *compatibilité de $\sim$ pour le produit* :

$$x^2\times\frac{xe^{-x}}{2}\frac{(2n+1)!}{(n!)^2}\left(1-\frac{e^{-x}}{2}\right)^n\left(\frac{e^{-x}}{2}\right)^n \underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{x^3e^{-(n+1)x}}{2^{n+1}}\frac{(2n+1)!}{(n!)^2}$$

avec :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3e^{-(n+1)x}}{2^{n+1}}\frac{(2n+1)!}{(n!)^2} = 0 \text{ par } \textit{croissances comparées} \text{ (expo-puissance)}$$

donc :

$$\lim_{x\to+\infty}x^2\times\frac{xe^{-x}}{2}\frac{(2n+1)!}{(n!)^2}\left(1-\frac{e^{-x}}{2}\right)^n\left(\frac{e^{-x}}{2}\right)^n = 0$$

et :

$$\frac{xe^{-x}}{2}\frac{(2n+1)!}{(n!)^2}\left(1-\frac{e^{-x}}{2}\right)^n\left(\frac{e^{-x}}{2}\right)^n = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

avec $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$ qui est une intégrale convergente en tant qu'*intégrale de Riemann* de paramètre $2>1$. Alors par *critère de négligeabilité appliqué aux fonctions positives*, l'intégrale

$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{xe^{-x}}{2} \frac{(2n+1)!}{(n!)^2} \left(1 - \frac{e^{-x}}{2}\right)^n \left(\frac{e^{-x}}{2}\right)^n dx$ converge aussi.

Comme $\displaystyle\int_0^1 \frac{xe^{-x}}{2} \frac{(2n+1)!}{(n!)^2} \left(1 - \frac{e^{-x}}{2}\right)^n \left(\frac{e^{-x}}{2}\right)^n dx$ converge aussi par continuité de l'intégrande sur le segment $[0,1]$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-x}}{2} \frac{(2n+1)!}{(n!)^2} \left(1 - \frac{e^{-x}}{2}\right)^n \left(\frac{e^{-x}}{2}\right)^n dx$ converge et par imparité $\displaystyle\int_{-\infty}^0 xg(x) \frac{(2n+1)!}{(n!)^2} (G(x))^n (1-G(x))^n dx$ converge aussi.

Conclusion : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} xg(x) \frac{(2n+1)!}{(n!)^2} (G(x))^n (1-G(x))^n dx$ est convergente et :

$$\mathbf{E}\left(\widehat{X}_{n+1} - \theta\right) = 0$$

Ainsi par propriété élémentaire de l'espérance :

$$\boxed{\mathbf{E}\left(\widehat{X}_{n+1}\right) = \theta \text{ et l'estimateur } \widehat{X}_{n+1} \text{ est sans biais}}$$

3. _

(a) Pour obtenir une densité de la variable $\sqrt{2n+1}\left(\widehat{X}_{n+1} - \theta\right)$ commençons par déterminer sa fonction de répartition que nous noterons $F_{\sqrt{2n+1}\left(\widehat{X}_{n+1}-\theta\right)}$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F_{\sqrt{2n+1}\left(\widehat{X}_{n+1}-\theta\right)}(x) = \mathbf{P}\left(\left[\sqrt{2n+1}\left(\widehat{X}_{n+1} - \theta\right) \leq x\right]\right)$$

dans ce cas :

$$\begin{aligned} F_{\sqrt{2n+1}\left(\widehat{X}_{n+1}-\theta\right)}(x) &= \mathbf{P}\left(\left[\widehat{X}_{n+1} \leq \frac{x}{\sqrt{2n+1}} + \theta\right]\right) \\ &= \widehat{F}_{n+1}\left(\frac{x}{\sqrt{2n+1}} + \theta\right) \end{aligned}$$

Par dérivation de $F_{\sqrt{2n+1}\left(\widehat{X}_{n+1}-\theta\right)}$ sur $\mathbb{R}$, nous obtenons une densité $\widehat{h}_{n+1}$ de $\sqrt{2n+1}\left(\widehat{X}_{n+1} - \theta\right)$:

$$\begin{aligned} &\forall x \in \mathbb{R},\ \widehat{h}_{n+1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \widehat{f}_{n+1}\left(\frac{x}{\sqrt{2n+1}} + \theta\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2n+1}} f\left(\frac{x}{\sqrt{2n+1}} + \theta\right) \frac{(2n+1)!}{(n!)^2} \left(F\left(\frac{x}{\sqrt{2n+1}} + \theta\right)\right)^n \left(1 - F\left(\frac{x}{\sqrt{2n+1}} + \theta\right)\right)^n \\ &= \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \frac{\exp\left(-\left|\frac{x}{\sqrt{2n+1}} + \theta - \theta\right|\right)}{2} \frac{(2n+1)!}{(n!)^2} \left(G\left(\frac{x}{\sqrt{2n+1}}\right)\right)^n \left(1 - G\left(\frac{x}{\sqrt{2n+1}}\right)\right)^n \\ &= \frac{1}{\sqrt{2n+1}} g\left(\frac{x}{\sqrt{2n+1}}\right) \frac{(2n+1)!}{(n!)^2} \left(G\left(\frac{x}{\sqrt{2n+1}}\right)\right)^n \left(1 - G\left(\frac{x}{\sqrt{2n+1}}\right)\right)^n \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad \widehat{h}_{n+1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \frac{(2n+1)!}{(n!)^2} \left(G\left(\frac{x}{\sqrt{2n+1}}\right)\right)^n \left(1 - G\left(\frac{x}{\sqrt{2n+1}}\right)\right)^n g\left(\frac{x}{\sqrt{2n+1}}\right)}$$

(b) Nous avons classiquement, lorsque u tend vers 0 :

$$\boxed{\begin{array}{l} e^{-u} = 1 - u + \frac{1}{2}u^2 + o\left(u^2\right) \\ \ln(1-u) = -u - \frac{1}{2}u^2 + o\left(u^2\right) \end{array}}$$

(c) Du fait que la fonction $G(1-G)$ est paire nous prendrons l'expression de G sur $\mathbb{R}_+$ trouvée en **I.4.a**. Ainsi :

$$\begin{aligned}
&G\left(\frac{x}{\sqrt{2n+1}}\right)\left(1-G\left(\frac{x}{\sqrt{2n+1}}\right)\right)\\
=\ &\left(1-\frac{1}{2}\exp\left(-\frac{x}{\sqrt{2n+1}}\right)\right)\left(\frac{1}{2}\exp\left(-\frac{x}{\sqrt{2n+1}}\right)\right)\\
=\ &\left(1-\frac{1}{2}\left(1-\frac{x}{\sqrt{2n+1}}+\frac{x^2}{2(2n+1)}\right)\right)\left(\frac{1}{2}\left(1-\frac{x}{\sqrt{2n+1}}+\frac{x^2}{2(2n+1)}\right)\right)+o\left(\frac{1}{2n+1}\right)\\
=\ &\left(\frac{1}{2}+\frac{x}{2\sqrt{2n+1}}-\frac{x^2}{4(2n+1)}\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{x}{2\sqrt{2n+1}}+\frac{x^2}{4(2n+1)}\right)+o\left(\frac{1}{2n+1}\right)\\
=\ &\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\frac{x^2}{2n+1}+o\left(\frac{1}{2n+1}\right)\text{ après \textit{troncature} à l'ordre deux}\\
=\ &\boxed{\frac{1}{4}\left(1-\frac{x^2}{2n+1}+o\left(\frac{1}{2n+1}\right)\right)}
\end{aligned}$$

(d) Tout d'abord remarquons que :

$$\begin{aligned}
&4^n\left[G\left(\frac{x}{\sqrt{2n+1}}\right)\left(1-G\left(\frac{x}{\sqrt{2n+1}}\right)\right)\right]^n\\
=\ &4^n\exp\left[n\ln\left(G\left(\frac{x}{\sqrt{2n+1}}\right)\left(1-G\left(\frac{x}{\sqrt{2n+1}}\right)\right)\right)\right]\\
=\ &4^n\exp\left[n\ln\left(\frac{1}{4}\left(1-\frac{x^2}{2n+1}+o\left(\frac{1}{2n+1}\right)\right)\right)\right]\\
=\ &4^n\exp\left[-n\ln 4+n\ln\left(1-\frac{x^2}{2n+1}+o\left(\frac{1}{2n+1}\right)\right)\right]\\
=\ &4^n\exp\left[-n\ln 4-\frac{nx^2}{2n+1}+no\left(\frac{1}{2n+1}\right)\right]\\
=\ &4^n\exp[-n\ln 4]\exp\left[-\frac{nx^2}{2n+1}+\frac{n}{2n+1}\varepsilon\left(\frac{1}{2n+1}\right)\right]\text{ avec }\varepsilon\left(\frac{1}{2n+1}\right)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0\\
=\ &\frac{4^n}{4^n}\exp\left[-\frac{nx^2}{2n+1}+\frac{n}{2n+1}\varepsilon\left(\frac{1}{2n+1}\right)\right]\\
=\ &\exp\left[-\frac{nx^2}{2n+1}\right]\exp\left[\frac{n}{2n+1}\varepsilon\left(\frac{1}{2n+1}\right)\right]
\end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to+\infty}-\frac{nx^2}{2n+1}=-\frac{x^2}{2}\text{ car }-\frac{nx^2}{2n+1}\underset{n\to+\infty}{\sim}-\frac{x^2}{2}\\
&\text{et }\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{n}{2n+1}\varepsilon\left(\frac{1}{2n+1}\right)\right]=0\text{ car }\lim_{n\to+\infty}\varepsilon\left(\frac{1}{2n+1}\right)=0\text{ et }\frac{n}{2n+1}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Par continuité de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$ nous pouvons conclure que :

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty}4^n\left[G\left(\frac{x}{\sqrt{2n+1}}\right)\left(1-G\left(\frac{x}{\sqrt{2n+1}}\right)\right)\right]^n &= \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\times e^0\\
&= \boxed{\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)}
\end{aligned}$$

(e) Pour commencer, constatons que le résultat précédent nous fait écrire de manière équivalente (caractérisation de l'équivalence) que :

$$\begin{aligned}
&4^n\left[G\left(\frac{x}{\sqrt{2n+1}}\right)\left(1-G\left(\frac{x}{\sqrt{2n+1}}\right)\right)\right]^n\underset{n\to+\infty}{\sim}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\\
&\text{soit que }\left[G\left(\frac{x}{\sqrt{2n+1}}\right)\left(1-G\left(\frac{x}{\sqrt{2n+1}}\right)\right)\right]^n\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{4^n}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)
\end{aligned}$$

En admettant que lorsque n tend vers l'infini on a : $\dfrac{1}{4^n}\dbinom{2n}{n} \sim \dfrac{1}{\sqrt{\pi n}}$ nous avons :

$$\begin{aligned}
\widehat{h}_{n+1}(x) &= \frac{1}{\sqrt{2n+1}} g\left(\frac{x}{\sqrt{2n+1}}\right)\frac{(2n+1)!}{(n!)^2}\left(G\left(\frac{x}{\sqrt{2n+1}}\right)\right)^n\left(1-G\left(\frac{x}{\sqrt{2n+1}}\right)\right)^n \\
&= \frac{1}{\sqrt{2n+1}}\frac{1}{2}\exp\left(-\left|\frac{x}{\sqrt{2n+1}}\right|\right)\frac{(2n+1)!}{(n!)^2}\left(G\left(\frac{x}{\sqrt{2n+1}}\right)\right)^n\left(1-G\left(\frac{x}{\sqrt{2n+1}}\right)\right)^n \\
&= \frac{2n+1}{\sqrt{2n+1}}\frac{1}{2}\exp\left(-\left|\frac{x}{\sqrt{2n+1}}\right|\right)\frac{(2n)!}{(n!)^2}\left(G\left(\frac{x}{\sqrt{2n+1}}\right)\right)^n\left(1-G\left(\frac{x}{\sqrt{2n+1}}\right)\right)^n \\
&= \frac{\sqrt{2n+1}}{2}\exp\left(-\left|\frac{x}{\sqrt{2n+1}}\right|\right)\frac{(2n)!}{(n!)^2}\left(G\left(\frac{x}{\sqrt{2n+1}}\right)\right)^n\left(1-G\left(\frac{x}{\sqrt{2n+1}}\right)\right)^n \\
&\underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{n}{2}}\frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}\frac{1}{4^n}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \\
&\text{car } \lim_{n\to+\infty}\exp\left(-\left|\frac{x}{\sqrt{2n+1}}\right|\right) = 1 \neq 0 \text{ donc } \exp\left(-\left|\frac{x}{\sqrt{2n+1}}\right|\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} 1 \\
&\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \text{ après simplifications}
\end{aligned}$$

Conclusion : comme

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

cela entraîne que :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\widehat{h}_{n+1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)}$$

4. Tout d'abord rappelons que si X est une variable normale centrée et réduite, la table de la fonction de répartition de cette loi nous donne que :

$$\mathbf{P}([-1.96 \leq X \leq 1.96]) = 0.95$$

Ainsi en appliquant ce résultat à la suite de variables $\left(\sqrt{2n+1}\left(\widehat{X}_{n+1}-\theta\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ nous pouvons affirmer que pour n grand :

$$\mathbf{P}\left(\left[-1.96 \leq \sqrt{2n+1}\left(\widehat{X}_{n+1}-\theta\right) \leq 1.96\right]\right) \simeq 0.95$$

Nota bene : le symbole $\simeq$ traduit le fait que nous effectuons un calcul approché lorsque n est grand. Ainsi :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\left(\left[\frac{-1.96}{\sqrt{2n+1}} \leq \widehat{X}_{n+1}-\theta \leq \frac{1.96}{\sqrt{2n+1}}\right]\right) &\simeq 0.95 \\
\text{soit encore } \mathbf{P}\left(\left[\widehat{X}_{n+1}-\frac{1.96}{\sqrt{2n+1}} \leq \theta \leq \widehat{X}_{n+1}+\frac{1.96}{\sqrt{2n+1}}\right]\right) &\simeq 0.95
\end{aligned}$$

Conclusion : un intervalle de confiance $IC_{5\%}(\theta)$ pour le paramètre θ au risque de 5% de se tromper, est donné par :

$$\boxed{IC_{5\%}(\theta) = \left[\widehat{X}_{n+1}-\frac{1.96}{\sqrt{2n+1}} \leq \theta \leq \widehat{X}_{n+1}+\frac{1.96}{\sqrt{2n+1}}\right] = [I_n, J_n]}$$

intervalle aléatoire avec :

$$\boxed{I_n = \widehat{X}_{n+1}-\frac{1.96}{\sqrt{2n+1}} \quad \text{et} \quad J_n = \widehat{X}_{n+1}+\frac{1.96}{\sqrt{2n+1}}}$$